Série 2 :

ch7 : p210 à 230 (convexité) 4 5 6 C 15 20 31 32 33 34* 36* 65 66 70
+extra 72* 85(DM7) et (86)
ch6 : p199 à 207 (suites et pt fixe) 16 39 40 41 42 79 80* 85 87 (88 89)
ch4 : p141 à 153(suites) 9 10 12 13 et 94(DM7)

C Modélisation d'un toboggan

Objectif Découvrir le lien entre fonction convexe et le sens de variation de sa fonction dérivée.

Afin de réduire au maximum les risques d'incidents, les toboggans sont soumis à des normes et des régulations très strictes, notamment vis-à-vis de leur pente maximale. Pour un toboggan de un mètre de haut destiné à une aire de jeu, on estime qu'il est aux normes si la valeur absolue de sa pente ne dépasse à aucun moment 1,5.

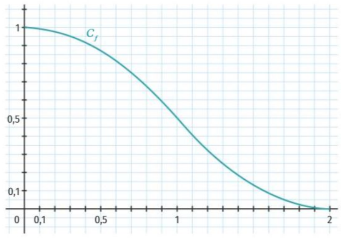
Un constructeur veut vendre un nouveau modèle de toboggan modélisé ci-contre par C_f, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+1 \text{ si } x\leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2}-2x+2 \text{ si } x>1 \end{cases}.$$

Avant de le vendre, le constructeur veut s'assurer que ce toboggan respecte bien les normes en vigueur.

1 Justifier que f est continue sur $[0\,;2]$.

2 Donner une expression de la fonction f', dérivée de la fonction f. Montrer que f' est continue sur $[0\,;2]$.



3 **a)** Donner une équation des tangentes à la courbe en $x=0$, en $x=0{,}5$, en $x=1{,}5$ et en $x=2$.

b) Comparer les pentes des tangentes à la courbe en $x=0$ et en $x=0{,}5$. Puis comparer les pentes des tangentes à la courbe en $x=1{,}5$ et en $x=2$. Comment semble évoluer la pente du toboggan entre 0 et 1 ? Comment semble évoluer la pente du toboggan entre 1 et 2 ? En quel point la valeur absolue de la pente semble-t-elle être maximale ?

4 **a)** Donner une expression de la fonction dérivée de la fonction dérivée de f notée f''. En déduire le tableau de variations de la fonction f'.

b) Sur quel intervalle la fonction f' est-elle croissante ? Sur quel intervalle la fonction f' est-elle décroissante ? En quel point admet-elle un extremum ? Combien vaut-il ?

c) Sur quel intervalle la fonction f semble-t-elle convexe ? Sur quel intervalle la fonction f semble-t-elle concave ?

5 En conclusion, ce nouveau modèle de toboggan respecte-t-il bien les normes en vigueur ?

Bilan Quel lien peut-on conjecturer entre la convexité et le sens de variation de la dérivée d'une fonction ?

15 Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=x^3-5x^2+8x-3$.

1. Étudier les variations de p sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de p sur $\mathbb{R}$.
3. Quelles sont les coordonnées des éventuels points d'inflexion

4 Utiliser les formules de dérivation

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé leur ensemble de dérivabilité.

1. $f : x \mapsto 2x^3+5x^2+3x+4$ définie sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto e^x(x^2-4x+3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
4. $k : x \mapsto \dfrac{x^2+5x+2}{3x+1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.
5. $\ell : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ définie sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

20 Que peut-on déduire pour la fonction k à partir du tableau de signes de sa dérivée seconde k'' ?

x	-8		2		4
$k''(x)$		$-$	0	$+$	

5 Déterminer une équation de tangente

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 1.

1. $f : x \mapsto 3x^2-7x+8$ définie sur $\mathbb{R}$;
2. $g : x \mapsto \sqrt{5x+6}$ définie sur $\left[-\dfrac{6}{5}\,;+\infty\right[$;
3. $h : x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

6 Problème

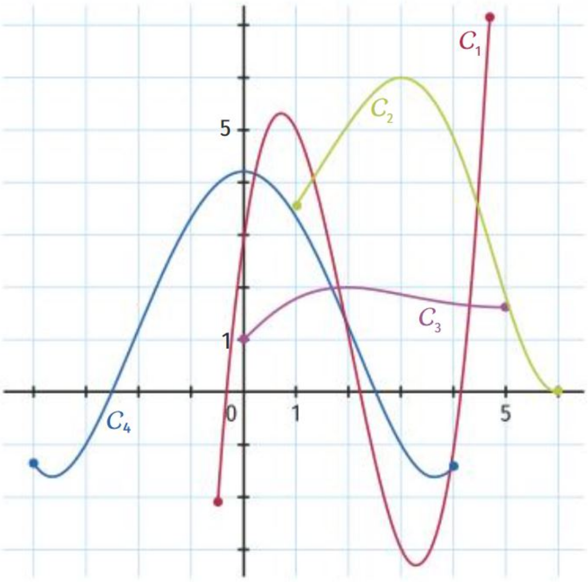
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{9}(x^3+3x^2-24x+7).$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative C_f au point d'abscisse -1.
3. Déterminer les abscisses des points pour lesquels la tangente à C_f est horizontale.
4. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x^2+3x+1$ et en déduire son signe.

   b. Étudier la position relative entre $\mathcal{T}$ et C_f.

31 Pour chacune des fonctions associées aux courbes suivantes, conjecturer la convexité et préciser approximativement les abscisses des éventuels points d'inflexion.



34 Voici le tableau de variations de la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-5\,;5]$.

x	-5		1		2		3		5
f''	-2	↗	0	↗	5	↘	0	↘	-3

Déterminer la convexité de f et les abscisses des éventuels points d'inflexion.

65 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^4+3x^3-6x^2-x-5.$$

1. Déterminer la dérivée seconde f'' de f et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire les variations de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

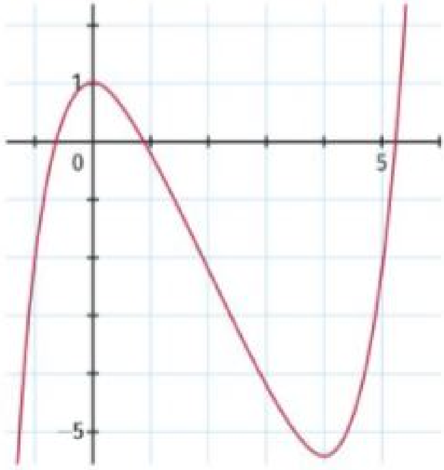
66 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$g(x)=\frac{x+2}{x-1}.$$

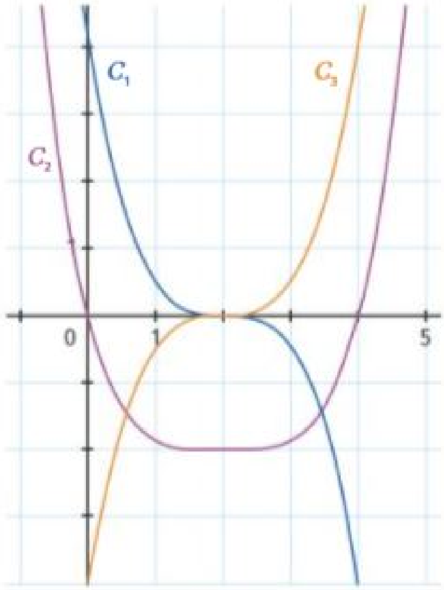
1. Sachant que $g''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, étudier son signe sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. En déduire la convexité de g sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

36 Voici la courbe d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.



Parmi les trois courbes suivantes, déterminer celle qui représente la fonction dérivée seconde f'' de f.



70 [Représenter.]

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f'.

x	-6		-2		1		2		5
f'	4	↘	0	↗	2	↘	0	↘	-2

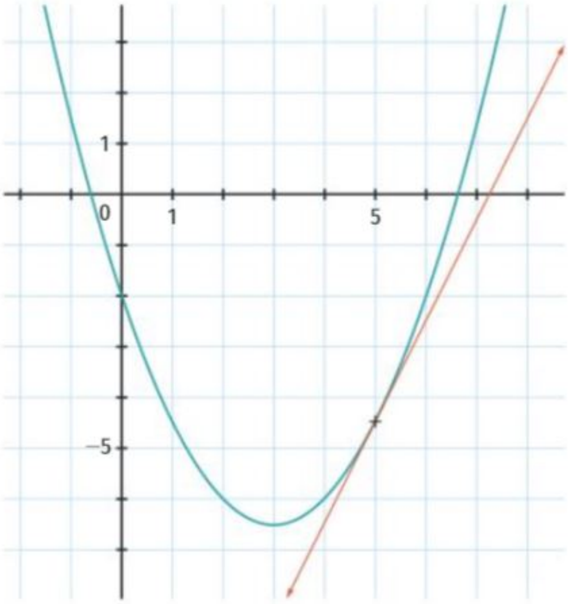
1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-6\,;5]$.

2. Déterminer la convexité de la fonction f.

3. Tracer, dans un repère, une allure de la courbe représentative de la fonction f ainsi que les tangentes horizontales.

72 [Représenter.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-2$. Sa courbe représentative C_f est tracée dans le repère ci-dessous ainsi que sa tangente au point d'abscisse 5.



1. Déterminer graphiquement la convexité de f.

2. Déterminer par le calcul une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 5.

3. En déduire que, pour tout réel x, on a les inégalités $\frac{1}{2}x^2-3x-2 \geqslant 2x-\frac{29}{2}$ et $x^2 \geqslant 10x-25$.

86 EN SES [Chercher.]

Une entreprise fabrique des calculatrices.

Le coût de production de x centaines de calculatrices en milliers d'euros est donné par la fonction C définie sur $[0\,;5]$ par $C(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{15}{2}x+9$.

1. Étudier les variations de la fonction C sur $[0\,;5]$.

2. Déterminer la dérivée seconde C'' pour tout réel x de $[0\,;5]$.

3. On dit que les rendements marginaux décroissent lorsque la fonction C devient convexe.

À partir de quelle quantité de production les rendements marginaux diminuent-ils ? Arrondir à l'unité.

> **Info :** Lorsque les rendements marginaux deviennent décroissants, cela signifie que le coût de production augmente mais moins rapidement. Autrement dit, pour chaque calculatrice supplémentaire produite, le coût de production unitaire est de plus en plus faible.

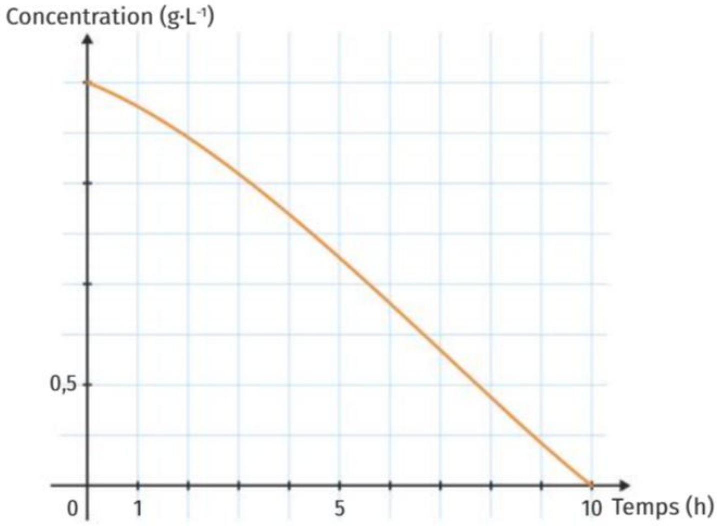
85 [Calculer.]

D'après bac ES, Métropole, juin 2014

Efficacité d'un médicament

On injecte un médicament à un patient et on étudie sa concentration durant dix heures dans le sang.

La concentration, en grammes par litre, est représentée par la courbe suivante.



Partie A : Étude graphique

1. Déterminer la concentration initiale.

2. Déterminer le moment où la concentration devient inférieure à 0,5 g·L⁻¹.

3. Déterminer graphiquement l'abscisse du point d'inflexion.

Partie B : Étude algébrique

La concentration peut être modélisée par la fonction C définie sur $[0\,;10]$ par $C(x)=0{,}001x^3-0{,}02x^2-0{,}1x+2$ où x représente le temps en heure.

1. Dresser le tableau de variations de C sur $[0\,;10]$.

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement à 10^{-2} près de la solution de $C(x)=0{,}5$.

3. Calculer la dérivée seconde C'' sur $[0\,;10]$ et étudier la convexité de C.

Partie C : Interprétation des résultats

1. Le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration est inférieure à 0,5 g·L⁻¹. Au bout de combien d'heures doit-on faire une nouvelle injection ?

2. Au bout de combien de temps la baisse de la concentration ralentit-elle ? Justifier.

16 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$. Alors :

a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{2}{x+1}$

b $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$

c $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

d $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

39 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [0\,;6]$, alors $f(x) \in [0\,;6]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0\,;6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

40 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Vérifier que si $x \in [2\,;5]$, alors $f(x) \in [2\,;5]$.

3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2\,;5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Pour les exercices 41 à 43

f est une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) désigne une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que (u_n) converge vers un réel ℓ. Dans chaque cas, déterminer les valeurs possibles de ℓ pour la fonction f et l'intervalle I donnés.

41 $f : x \mapsto x^2$ et $\mathrm{I} = [0\,;1]$.

42 $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$.

79 [Raisonner.]

Soit f la fonction définie sur $[-6\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{6+x}.$$

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.

2. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?

3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

80 [Raisonner.]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Étudier les variations de f.

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

85 ALGO [Raisonner, Modéliser.]

Soient f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{5}{x}\right)$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle est minorée.

3. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ dont on déterminera la valeur exacte.

4. Écrire un algorithme permettant de déterminer un encadrement de α à 10^{-n} près, n étant un entier donné par l'utilisateur.

Histoire des maths

Cette méthode d'approximation d'une racine carrée est générale (en remplaçant 5 par tout autre nombre positif) et on en trouve une explication dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie (Ier siècle après J.-C.), mathématicien également connu pour ses inventions mécaniques.

87 [Chercher, Raisonner.]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0{,}1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+4}$ sur $\mathrm{I} =]-4\,;+\infty[$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;1]$ puis que (u_n) est croissante.

3. En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

88 [Raisonner, Calculer.]

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 0{,}2$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que $[0\,;1]$ est stable par f ; autrement dit, que si $x \in [0\,;1]$, alors $f(x) \in [0\,;1]$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;1]$.

4. Donner le sens de variation de la suite (u_n).

5. En déduire la convergence de (u_n) et déterminer alors sa limite.

89 [Raisonner, Calculer.]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

On pose $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[1\,;2]$.

2. Démontrer que, pour tout $x \in [1\,;2]$, $f(x) \in [1\,;2]$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [1\,;2]$.

4. Étudier les variations de la suite (u_n).

5. En déduire la convergence de (u_n) et déterminer alors sa limite.

9 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{10} - 2v_n + 1$. À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la suite (v_n) est :

a bornée. **b** croissante.

c décroissante. **d** convergente.

10 Une suite (w_n) est majorée par 4 et converge vers un réel ℓ. Alors, on peut affirmer que :

a $\ell = 4$

b (w_n) est croissante.

c $\ell \leqslant 4$

d la suite (w_n) est constante égale à 4 à partir d'un certain rang.

94 [Calculer, Modéliser.]

D'après bac S, Centres étrangers, juin 2018

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients achetant un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients n'achetant pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement : « le client achète un melon au cours de la semaine n » et $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.

2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_n > 0{,}8$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = p_n - 0{,}8$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n).

12 Soit (u_n) une suite qui converge vers 1.

a La suite est croissante.

b La suite est bornée à partir d'un certain rang.

c La suite est positive à partir d'un certain rang.

d La suite est majorée par 1.

13 Soit (v_n) une suite bornée.

a La suite n'est pas monotone.

b La suite est monotone.

c La suite est convergente.

d La suite peut diverger.