Exercices

Exercice 1

f est la fonction carré - donc définie par $f(x) = x^2$ pour tout réel x.

1. Étant donné $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$. En déduire la limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0, limite qui est aussi notée $f'(1)$.
2. De même, déterminer le nombre $f'(2)$; recommencer dans le cas général pour trouver $f'(a)$ avec a réel.

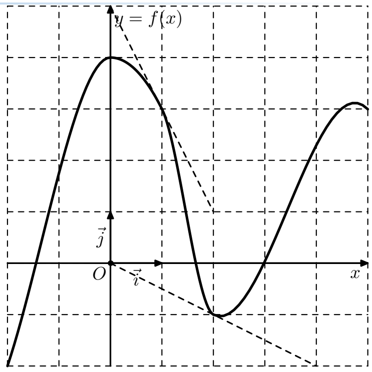
Exercice 2

1. Montrer que pour tout nombres réels a et b : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. Pour $h \neq 0$, simplifier l'expression $\dfrac{(10+h)^3 - 10^3}{10+h-10}$
3. En déduire le nombre dérivé de la fonction cube en $x = 10$.

Exercice 3

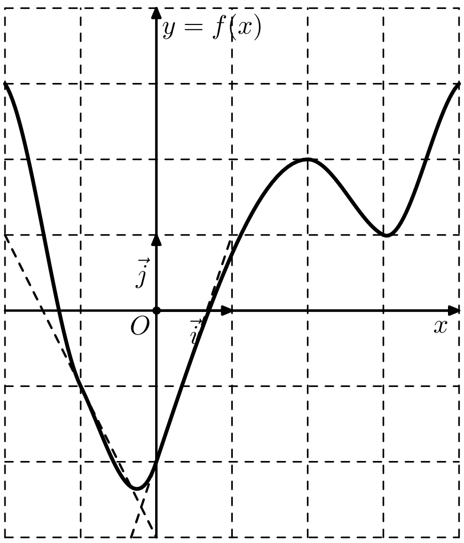
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1. Donner sans justifier $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Quel est le nombre dérivé de f en 0.
3. Quel est le signe de $f'(3)$?

Exercice 4



On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2; 5]$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$.

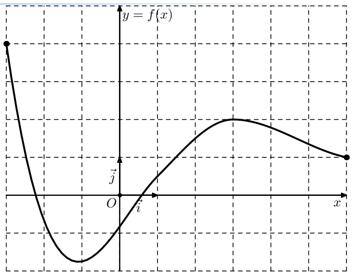
1. Lire graphiquement et sans justifier $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Lire graphiquement le nombre dérivé de f en -1.
3. Quel est le signe de $f'(1)$? Quel est le signe de $f'(2{,}5)$?

Exercice 5

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-3\ ;\ 6]$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

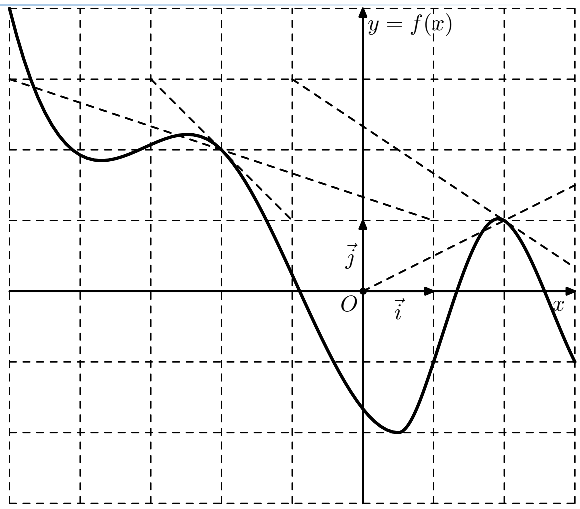
Ranger dans l'ordre croissant les nombres $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.



Exercice 6

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 3]$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

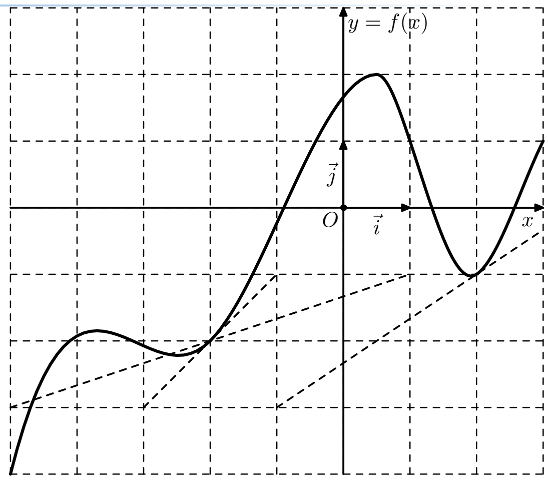


1. Donner sans justifier $f'(-2)$ et $f'(2)$.
2. Quel est le signe de $f'(-4)$?
3. Quel est le nombre dérivé de f en 0,5 ? Pourquoi ?

Exercice 7

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-5; 3]$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.



1. Donner, par lecture graphique et sans justifier, $f(-2)$, $f(2)$, $f'(-2)$ et $f'(2)$.
2. Quel est le nombre dérivé de f en 0,5 ? Pourquoi ?
3. Quel est le signe de $f'(-4)$? Expliquer rapidement.

Exercice 8

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction constante égale à 10 en -2.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction identité en -2.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction inverse en 2.

Exercice 9

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $g(t) = t^2 - 4\,t + 9$.
2. $g(x) = 3x^2 + 5x + \dfrac{1}{x}$.
3. $h(x) = 4\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x - 6$.
4. $j(x) = \dfrac{-\,x^2 + 3\,x + 5}{4}$
5. $i(x) = 5\,x^7 - 2\,x^4 + 3\,x^2 - \pi$.
6. $k(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x}{x - 3}$.

Exercice 10

Dans un repère (O, I, J), on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.
2. À l'aide de votre calculatrice, T semble être tangente à $\mathscr{C}$ en un autre point.
   Conjecturer l'abscisse correspondante puis montrer votre hypothèse par le calcul.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 8$.
Déterminer les points de la représentation graphique de f pour lesquels la tangente est horizontale.

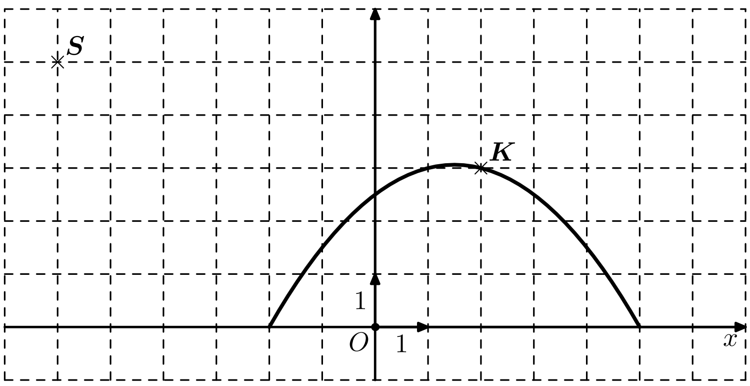
Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

1. $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en chacun de ses points. Pourquoi ?
2. a) Donner une équation de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.
   b) Le point $E(-4; -3)$ appartient-il à la tangente T_{-3} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ dont le coefficient directeur vaut -4 ? Si oui, en quels points ?
4. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite D d'équation $y = -7x + 5$? Si oui, en quels points ?
5. Existe-t-il des tangentes horizontales ? Si oui, en quels points ?

Exercice 13

Sur la figure ci-contre, l'arc de parabole représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.
Le point $S(-6 ; 5)$ représente le soleil en train de se coucher.
L'arc de parabole est la représentation graphique de la fonction f définie pour $x \in [-2 ; 5]$ par $f(x) = -0{,}25\,x^2 + 0{,}75\,x + 2{,}5$.



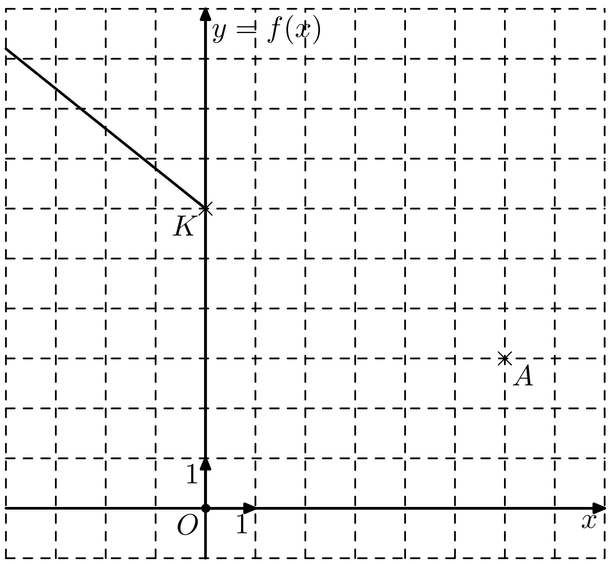
BUT : On veut déterminer la longueur de l'ombre de la colline.

1. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point K.
2. Vérifier que le point S appartient à cette tangente T.
3. Pour quelle valeur de x la droite T coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
4. Quelle est alors la longueur au sol de l'ombre de la colline ?

Exercice 14

Il existe plusieurs tremplins de saut à ski à Oslo, en Norvège.

On peut notamment trouver un tremplin olympique appelé l'**Holmenkollbakken**, dans le quartier d'Holmenkollen. Ce type de tremplin peut être modélisé dans un repère orthonormal par un segment $[DK]$ raccordé à un arc de parabole, notée $\mathscr{P}$.



Données :

- $D\,(-20\,;22)$ (en dehors du graphique)
- $K\,(0\,;6)$
- $A\,(6\,;3)$
- L'arc de parabole $\mathscr{P}$ entre K et A est la représentation graphique de $\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$ lorsque $x \in [0\,;\,6]$.

Objectif : Trouver l'expression de f (c'est-à-dire déterminer les valeurs de a, b et c) afin que le raccordement soit satisfaisant.

1. Tracer à main levée un arc de parabole qui pourrait convenir.

2. **$\mathscr{P}$ doit passer par le point K :**
   Retrouver la valeur de la constante c en utilisant les coordonnées de K.

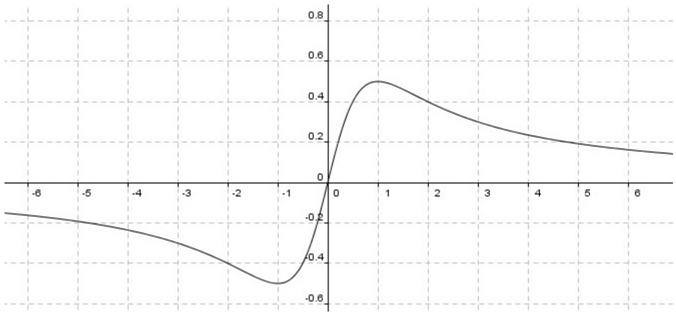
3. **La bonne tangente en K pour déterminer b :**
   a) À l'aide des coordonnées des points D et K, calculer le coefficient directeur de la droite (DK).
   b) Que représente la droite (DK) pour la parabole $\mathscr{P}$? Quelle doit être la valeur de $f'(0)$?
   c) Calculer l'expression de $f'(x)$ et en déduire $f'(0)$. Retrouver alors la valeur de la constante b.

4. **L'extrémité du tremplin pour trouver a :**
   Le tremplin se termine au point A. Utiliser les coordonnées de ce point pour trouver la valeur de a. En déduire l'expression complète de $f(x)$.

5. Comment savoir si la fin du tremplin est horizontale ?

Exercice 15

On a tracé la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$



1. Pourquoi f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?

2. Conjecturer en quels points la tangente à la courbe de f est horizontale.

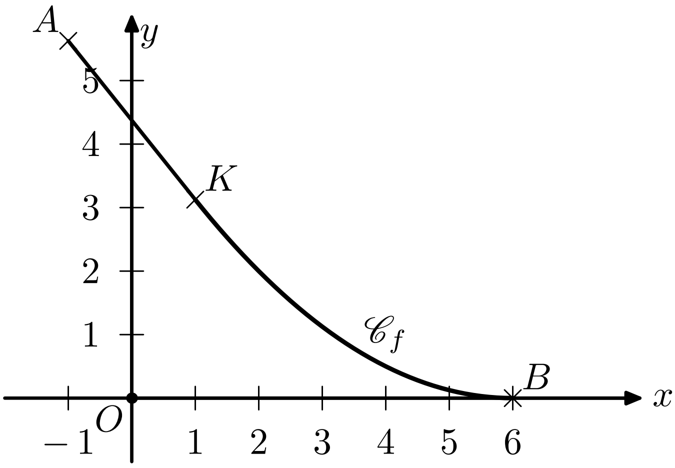
Tracer ces tangentes sur le graphique.

3. Démontrer cela par un calcul.

Exercice 16

On modélise une rampe de skate board à l'aide d'un arc de parabole $\mathscr{C}_f$ qui représente la fonction f définie sur $[1\,;\,6]$ par $f(x) = 0{,}125\,x^2 - 1{,}5\,x + 4{,}5$

Cet arc de parabole est prolongé par le segment $[AK]$, tangent à $\mathscr{C}_f$ au point K.



BUT : On veut vérifier si cette rampe est sure pour les skateboard-ers ?

1. **Étude du raccord avec le sol**

(a) Que faut-il vérifier pour être certain que le raccordement est bon avec le sol ?

(b) Vérifier et expliquer.

2. **Étude du raccord en K**

(a) Que faut-il vérifier pour être certain que le raccordement est bon en K ?

(b) Vérifier et expliquer.

(c) La fin de la rampe se situe au point A qui est sur T, à l'abscisse -1.

Quelle est la hauteur de cette rampe ?.