Chapitre 1 : Les Équations

Définition 1 :

- Une équation est une égalité mathématique composée de termes que l'on connaît et d'autres que l'on ne connaît pas (appelée inconnues) et que l'on cherche à connaître.
- Résoudre une équation, c'est trouver les valeurs de(s) l'inconnue(s) qui rendent vraie cette égalité. (les méthodes dépendent du type d'équation à résoudre)

1) Équation du premier degré

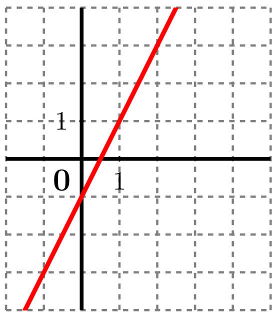
Définition 2 :

Une équation est dite du premier degré si elle est de la forme $ax + b = 0$ avec a et b des réels et $a \neq 0$

Définition 3 :

On appelle fonction affine toute fonction f définie par $f(x) = ax + b$ avec a réel non nul et b réel. Sa courbe est une droite non verticale.

La solution d'une équation du type $ax + b = 0$ est l'abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses.



Règles :

1. On ne change pas les solutions d'une équation en ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres de l'équation.
2. On ne change pas les solutions d'une équation en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.

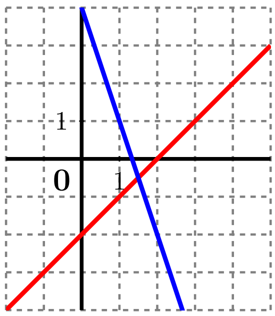
Remarque :

La solution d'une équation du type $ax + b = cx + d$ (avec a et b non nul en même temps) est l'abscisse du point d'intersection de deux droites.

Exemple : droite 1 : $y = x - 2$ droite 2 : $y = -3x + 4$

Graphiquement : $x - 2 = -3x + 4$ a pour solution 1,5.

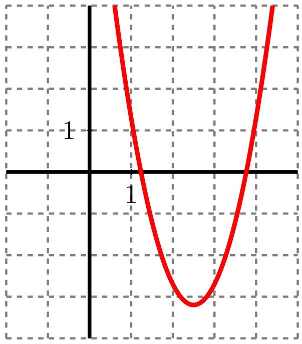
Algébriquement : $x - 2 = -3x + 4 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$



2) Équation du second degré

Définition 4 : Une équation est dite du second degré si elle est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

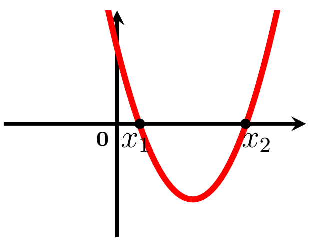
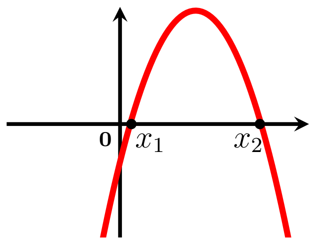
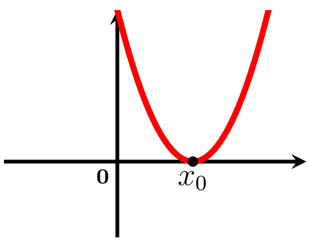
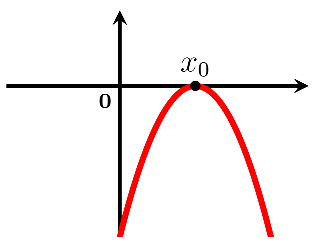
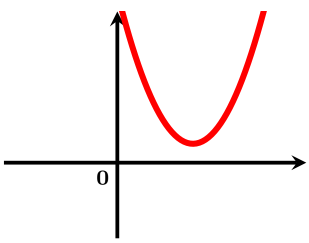
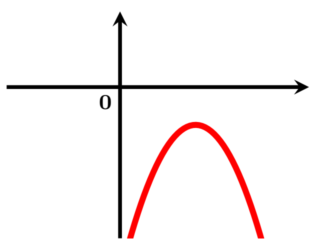
Définition 5 : On appelle fonction du second degré toute fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.
Sa courbe est une parabole.



Les solutions d'une équation du type $ax^2+bx+c=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses (s'ils existent).

Théorème :
Soit $(E) : ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant.

- si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$;
- si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) a une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$, définie par : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) a dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Exemples :

- Résoudre $x^2 - 5x + 4 = 0$

  ....

  ....

  ....

- Résoudre $-2x^2 + 7x - 2 = 0$

  ....

  ....

  ....

- Résoudre $4x^2 - 16x + 16 = 0$

  ....

  ....

  ....

Explication de cette méthode : Mais d'où vient le discriminant ?

Pour résoudre une équation du second degré, il va falloir changer sa forme. Si c'est possible, on factorise pour avoir une équation produit (facile à résoudre).

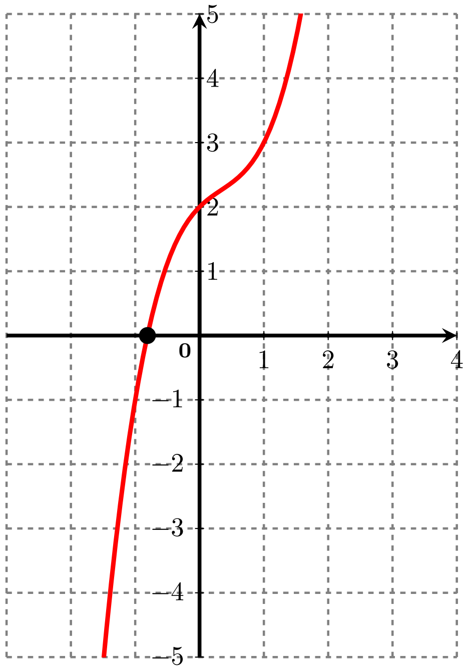
Méthode	**Étapes de calcul**
$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$	....
$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$	....
$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$	....
En posant $\Delta = b^2 - 4ac$	
$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$	....

Si $\Delta > 0$:	Si $\Delta = 0$:
....	....
....	....

3) Equations du troisième degré

Il existe un équivalent du théorème précédent uniquement pour les équations du 3^{eme} et du 4^{eme} degré mais les formules sont complexes et ne sont pas à connaître au lycée. On va donc étudier une fonction pour tenter de trouver le nombre et une approximation des solutions.

Exemple : $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$



a) On trace sur la calculatrice la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$$

b) On regarde sur le graphique le nombre de solutions et on localise chacune d'elle sur un intervalle.

c) On programme un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle choisi.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

La (dans cet exemple, il n'y en a qu'une) solution est comprise entre $x = \ldots\ldots$ et $x = \ldots\ldots$

d) On peut reprendre l'étape précédente avec un pas plus petit sur l'intervalle trouvé en c).

x	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
$f(x)$										

La solution est comprise entre $x = \ldots\ldots$ et $x = \ldots\ldots$

On recommence sur l'intervalle ....

x						
$f(x)$						

On a alors un encadrement de la solution de l'équation $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$

$$\ldots\ldots < x < \ldots\ldots$$

4) Se ramener à une équation connue

Pour toute autre équation polynomiale, on se ramènera, si possible, à une équation connue :

- **Exemple 1 :** $\dfrac{2x+3}{4x^2+1} = \dfrac{3}{x-2}$

  On se ramène à du second degré grâce à un produit en croix

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- **Exemple 2 :** $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$,

  On se ramène à du second degré grâce à un changement de variable

  On peut poser $X = x^2$ pour obtenir l'équation ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- **Exemple 3 :** $x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 12x - 2 = 0$

  On se sert d'indications pour transformer l'expression

  Montrer par exemple que résoudre l'équation revient à résoudre $(x^2 + 4x + 9)(x^2 - 3) = 0$

  ....

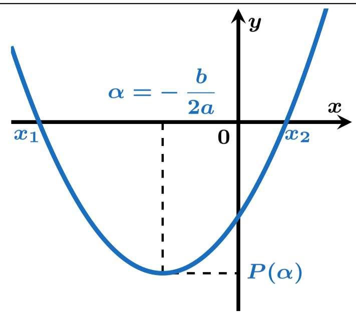
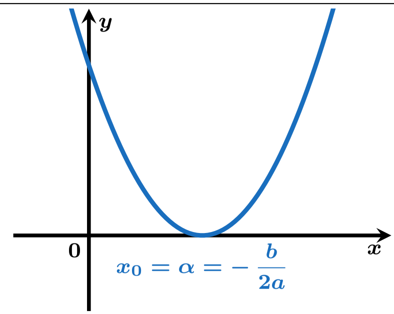
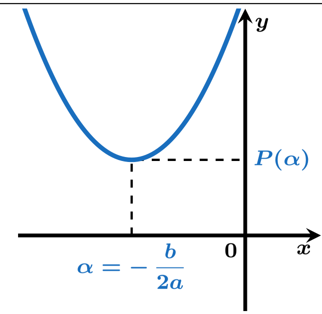
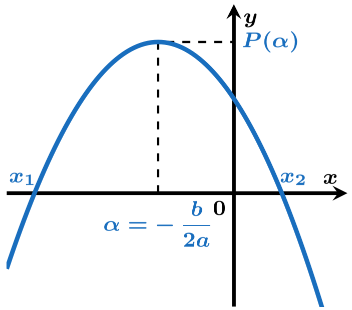
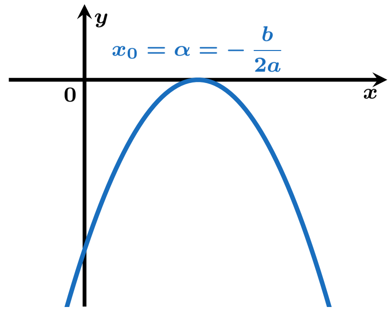
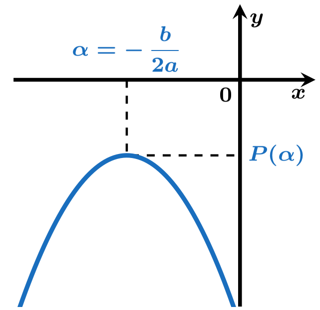
  ....

  ....

  ....

  ....

5) Signe d'un polynôme $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, avec $a \neq 0$

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Équation $P(x) = 0$</td><td>2 solutions x_1 et x_2
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$</td><td>pas de solution dans $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Factorisation de $P(x)$</td><td>$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>$a(x-x_0)^2$</td><td>pas de factorisation dans $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a > 0$</td><td>Courbes</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de $P(x)$</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & + & 0 & + & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & + & \end{array}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a < 0$</td><td>Courbes</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Signe de $P(x)$</td><td>$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & - & 0 & - & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline \text{Signe de } P(x) & & - & \end{array}$</td></tr>
</table>