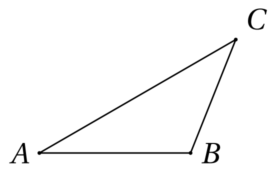
Corrections : Série 1

Exercice 1 –

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

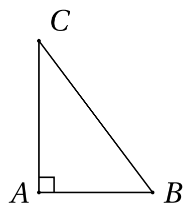
1) On considère trois points A, B et C, tels que

$$AB = 4,\ AC = 6 \text{ et } \widehat{BAC} = 30°$$

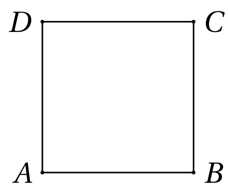


2) On considère un triangle ABC, rectangle en A, tel que

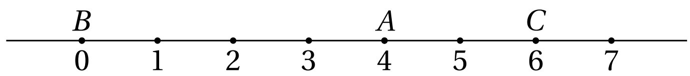
$$AB = 3,\ AC = 4 \text{ et } BC = 5$$



3) On considère $ABCD$ un carré de côté 4



4)On considère la droite graduée suivante :



5) Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(5\,;\,2)$, $B\,(3\,;\,3)$ et $C\,(-2\,;\,-1)$.

6) $ABDC$ est un parallélogramme tel que $AB = 7$, $AD = 8$ et $AC = 5$.

7) ABC est un triangle équilatéral de côté 5.

8) Les trois points A, B et C sont tels que $AB = 8$, $BC = 4$ et B appartient au segment $[AC]$.

9) Le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A.

10) $ABCD$ est un losange de centre O dans lequel la diagonale $[AC]$ mesure 20.

Corrigé

1) On a $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos(30) = 4 \times 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

2) On est dans le cas où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, donc, on a $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$.

3) On peut trouver On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de 2 manières, l'une étant plus efficace que l'autre :

Idée 1 On utilise la définition 1 du cours.

On sait que la diagonale d'un carré de côté 4 mesure $4\sqrt{2}$, et que l'angle de la diagonale est égal à 45°.

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos(45) = 4 \times 4\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 16$

Idée 2 On utilise le projeté orthogonal : on sait qu'ici B est le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| = 4 \times 4 = 16$ (un peu plus rapide...)

4) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraire, on a alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC = -4 \times 2 = -8$

5) On doit calculer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$.

On a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2 \times (-7) + 1 \times (-3) = 14 - 3 = 11$

6) En utilisant la formule des normes, on a

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2)$$

$$= \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AD}||^2 - 7^2 - 5^2) = \frac{1}{2}(8^2 - 7^2 - 5^2) = -5$$

7) On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \cos(60) = 5 \times 5 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{2}$

8) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, on a alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC = 8 \times 12 = 96$

9) On sait que dans cette configuration le triangle ABC est rectangle en A, on a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

10) En utilisant le projeté orthogonal,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC} = 10 \times 20 = 200$

Série 2

Exercice 2 –

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

1) Calculer $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$, puis $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right)$.

2) Calculer $\left(3\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2$.

3) Calculer $\left(4\vec{u} - 3\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + 2\vec{v}\right)$.

Corrigé

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

1) On développe! $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 - 6 + 4 = 7$

   puis $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 9 - 4 = 5$.

2) Idem $\left(3\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 = 9\|\vec{u}\|^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 81 + 36 + 16 = 133$.

3) Double distributivité :

   $\left(4\vec{u} - 3\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) = 4\vec{u} \cdot \vec{u} + 8\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 4\|\vec{u}\|^2 + 5\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 36 - 15 - 24 = -3$.

Exercice 3 –

1) Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \,.\, \vec{w} = 5$.

   a) Calculer $\vec{v} \,.\, \vec{u}$ et $\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w})$.

   b) Calculer $\vec{u} \,.\, 2\vec{v}$ et $(-3\vec{v}) \,.\, \vec{u}$.

2) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = 3$ et $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 6$.

   a) Calculer $\vec{u}^{\,2}$, $\vec{v}^{\,2}$ et $(\vec{u} + \vec{v})^2$.

   b) Calculer $\vec{u} \,.\, (\vec{u} - \vec{v})$.

Corrigé

1) Soit trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \,.\, \vec{w} = 5$.

   a) On a : $\vec{v} \,.\, \vec{u} = ||\vec{v}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(\vec{v}\,;\vec{u}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \vec{u} \,.\, \vec{v} = 3$.

   On a : $\vec{u} \,.\, (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{u} \,.\, \vec{w} = 3 + 5 = 8$.

   b) On a : $\vec{u} \,.\, 2\vec{v} = 2 \times (\vec{u} \,.\, \vec{v}) = 2 \times 3 = 6$

   De la même façon, $(-3\vec{v}) \,.\, \vec{u} = -3 \times (\vec{v} \,.\, \vec{u}) = -3 \times 3 = -9$.

2) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = 3$ et $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 6$.

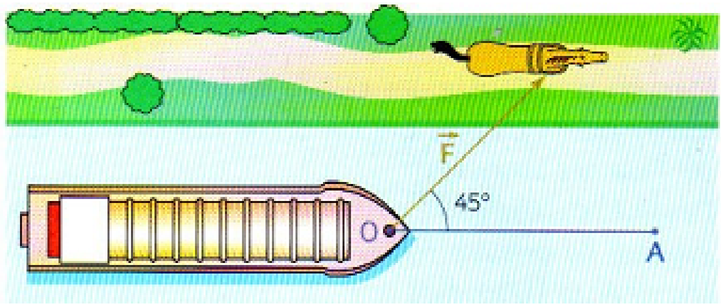
   a) On a : $\vec{u}^{\,2} = ||\vec{u}||^2 = 4^2 = 16$ et $\vec{v}^{\,2} = ||\vec{v}||^2 = 3^2 = 9$.

   On a : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \,.\, (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u} \,.\, \vec{v} + \vec{2}^{\,2} = 16 + 2 \times 6 + 9 = 37$.

b) On a : $\vec{u}\,.(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\vec{u} - \vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}^{\,2} - 6 = 16 - 6 = 10$.

Exercice 4 –

Pour tirer sur 50 m de O en A une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force $\vec{F}$ d'intensité de 2000 newtons selon une force de 45° avec la direction du déplacement.



1) Quel est le travail W de la force ?

2) Si la péniche est tirée par un bateau, suivant l'axe du déplacement, quelle est l'intensité de la force qu'il faut exercer pour obtenir le même travail ?

Corrigé

1) Le travail de la force, W, est le produit scalaire de $\overrightarrow{OA}$ par $\vec{F}$.
   On a alors : $W = ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\vec{F}|| \times \cos(\overrightarrow{OA};\, \vec{F}) = 50 \times 2000 \times \cos(45) = 100\,000 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 50\,000\sqrt{2}$

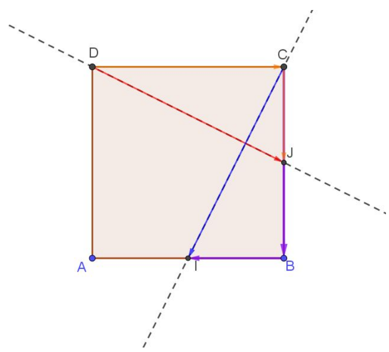
2) On cherche une nouvelle force $\overrightarrow{F_1}$, colinéaire et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{OA}$.
   On a alors $\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{F_1} = OA \times F_1 = 50 \times F_1 = 50\,000\sqrt{2}$.
   On en déduit alors que $F_1 = 1\,000\sqrt{2}$.
   Il faut donc exercer une force de $1\,000\sqrt{2}$ newtons (environ 1414 N), pour obtenir le même travail.

Exercice 5 –

Soit $ABCD$ un carré. Les points I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$.

Démontrer que les droites (DJ) et (CI) sont perpendiculaires.

Corrigé



Il suffit de montrer que $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{CI} = 0$

(On peut supposer que le carré a pour côté 1).

On décompose avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$, puis $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}$

On calcule :

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{CI} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}).(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{BI} = 0 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 0 = 0$

Donc, les droites (DJ) et (CI) sont perpendiculaires.

Série 3

Exercice 6 –

1) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$,, on donne trois points $A(4\,;1)$, $B(0\,;5)$ et $C(-2\,;-1)$.

   a) Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$

   b) En déduire que $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de $\widehat{BAC}$

2) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(5;2)$, $B(-1;6)$ et $C(0;1)$.

   a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire la valeur exacte de l'angle $\widehat{BAC}$.

Corrigé

1) On donne trois points $A(4\,;1)$, $B(0\,;5)$ et $C(-2\,;-1)$.

   a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-4\\5-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-4\\-1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

   Donc $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=-4\times(-6)+4\times(-2)=24-8=16$

   b) On a aussi $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

   avec $\|\overrightarrow{AB}\|^2=(-4)^2+4^2=32$ et $\|\overrightarrow{AC}\|^2=(-6)^2+(-2)^2=40$

   Donc $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=16\\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\sqrt{32}\times\sqrt{40}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\end{cases}$

   On a donc :

   $16=\sqrt{32}\times\sqrt{40}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

   $\Leftrightarrow\quad (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 1{,}1$ rad soit $\approx 63°$

2) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$, donc, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=-6\times(-5)+4\times(-1)=30-4=26$.

   On a aussi $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

   avec $\|\overrightarrow{AB}\|^2=(-6)^2+4^2=52$ et $\|\overrightarrow{AC}\|^2=(-5)^2+(-1)^2=26$

   Donc $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=26\\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=\sqrt{52}\times\sqrt{26}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\end{cases}$

   On a donc :

   $26=\sqrt{52}\times\sqrt{26}\times\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \quad\Leftrightarrow\quad \cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{26}{\sqrt{26}\times\sqrt{52}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

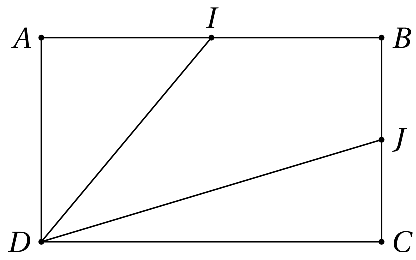
   $\Leftrightarrow\quad (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=45°$.

   (d'après un dessin, on peut savoir que c'est bien un angle qui a une mesure positive)

Exercice 7 –

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.

On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.



1) Calculer $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) . (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ})$, en développant ce calcul.

2) Quelle est la valeur de $\overrightarrow{DI} . \overrightarrow{DJ}$?

3) En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{IDJ}$.

Corrigé

1) On a : $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) . (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} . \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI} . \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AI} . \overrightarrow{CJ}$.

   $\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} . \overrightarrow{CJ} = 0$ car $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{CJ}$.

   $\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{CJ} = DA \times CJ = 3 \times 1,5 = 4,5$ $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ}$ colinéaires de même sens.

   $\overrightarrow{AI} . \overrightarrow{DC} = AI \times DC = 2,5 \times 5 = 12,5$ $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires de même sens.

   On a donc : $(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) . (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}) = 4,5 + 12,5 = 17$.

2) Par Chasles, on a bien : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{DJ}$, donc, $\overrightarrow{DI} . \overrightarrow{DJ} = 17$

3) On a : $(\overrightarrow{DI} . \overrightarrow{DJ}) = 17 = DI \times DJ \times \cos(\widehat{IDJ})$

   En utilisant le théorème de Pythagore, on a $DI = \sqrt{15,25}$ et $DJ = \sqrt{27,25}$.

   De $DI \times DJ \times \cos(\widehat{IDJ}) = 17$, on en déduit que : $\cos(\widehat{IDJ}) = \dfrac{17}{\sqrt{15,25} \times \sqrt{27,25}}$

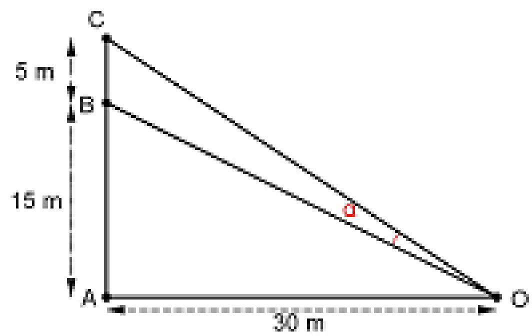
   $\widehat{IDJ} = \cos^{-1}\left(\dfrac{17}{\sqrt{15,25} \times \sqrt{27,25}}\right) \approx 33°$.

Exercice 8 –

1) A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB).

   Démontrer que : $\overrightarrow{OB} . \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$

2) Dans la figure ci-contre, calculer l'angle α. (arrondir au dixième de degré)



Corrigé

1) On a : $\overrightarrow{OB} . \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) . \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{OC}$.

   En utilisant le projeté orthogonal de C sur la droite (OA), $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2$.

   En utilisant le projeté orthogonal de O et de C sur la droite (AB), $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$.

   Donc, $\overrightarrow{OB} . \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$

2) En utilisant les longueurs données sur cette figure, on a d'une part :

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 30^2 + 15 \times 20 = 900 + 300 = 1200.$

En utilisant la formule 1 du produit scalaire, on a : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = ||\overrightarrow{OB}|| \times ||\overrightarrow{OC}|| \times \cos\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

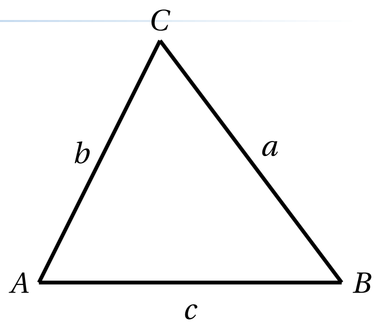
D'après le théorème de Pythagore, on a $OB = \sqrt{1125} = 15\sqrt{5}$ et $OC = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$.

On a donc : $15\sqrt{5} \times 10\sqrt{13} \times \cos(\alpha) = 1200$, c'est à dire : $\cos(\alpha) = \dfrac{1200}{150\sqrt{65}} = \dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

On en déduit que $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{8\sqrt{65}}{65}\right) \approx 7{,}1°$.

Exercice 9 –

Le théorème de Pythagore généralisé : la formule d'Al-Kashi.



Soit ABC un triangle quelconque,

on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

Les angles de sommets respectifs A, B et C sont notés $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

On a : $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.}$

On obtient évidemment, le même style de formule pour b^2 et c^2.

1) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

   a) Calculer AC.

   b) Calculer à un degré près la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

2) Soit ABC un triangle tel que : $AB = 5$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 12$ cm.

   Quelles sont les mesures des angles de ce triangle à un degré près ?

Corrigé

1) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 8$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

   a) En utilisant la formule d'Al-Kashi, on a : $AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times \cos(\widehat{CBA}) = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos(60) = 64 + 9 - 48 \times \frac{1}{2} = 73 - 24 = 49$.
   On en déduit que $AC = \sqrt{49} = 7$.

   b) En utilisant la formule d'Al-Kashi, on a : $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
   On en déduit que : $8^2 = 3^2 + 49 - 2 \times 3 \times 7 \times \cos(\widehat{BAC})$, autrement dit : $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{7}$.
   Donc, $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right) \approx 98°$.

2) On utilise évidemment encore les formules d'Al-Kashi. C'est le même travail que la question 1)b).

   On a : $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

   On en déduit que : $12^2 = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos(\widehat{BAC})$, autrement dit : $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{19}{45}$.

   Donc, $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(-\frac{19}{45}\right) \approx 115°$.

   En procédant de même, $\widehat{BCA} = \cos^{-1}\left(\frac{25}{27}\right) \approx 22°$ et $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{11}{15}\right) \approx 43°$.

Exercice 10 –

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, les points $A(1;1)$, $B(3;4)$ et $C(3-k;-1)$ où k est un réel.

1) Déterminer k pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

2) Démontrer que le triangle est aussi isocèle en A.

Corrigé

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, les points $A(1;1)$, $B(3;4)$ et $C(3-k;-1)$ où k est un réel.

1) Pour que le triangle ABC soit rectangle en A, il faut que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$. Autrement dit, $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2-k\\-2\end{pmatrix}=0$. On résout l'équation : $4-2k-6=0$: On trouve $k=-1$.

2) Le triangle est alors aussi isocèle en A car $AB=||\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}||=\sqrt{13}$ et $AB=||\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}||=\sqrt{13}$

Exercice 11 –

Dans $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthonormal direct, soient A et B les points de coordonnées

$$(-1;1) \quad \text{et} \quad (3;-1)$$

1) Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$?

2) En posant $M(x;y)$, déterminer une équation de cet ensemble.

3) Et que dire de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}=0$?

Corrigé

1) C'est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.
2) On obtient $\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=0$, d'où $4(x+1)-2(y-1)=0$ soit $4x+4-2y+2=0$
On peut écrire : $-2y+4x+6=0$(équation cartésienne) ou encore $y=2x+3$ (équation réduite)

3) On obtient cette fois le cercle de diamètre [AB] !
En effet : $\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}=0$ donne $(x+1)(x-3)+(y-1)(y+1)=0$ qui conduit à $x^2-2x+y^2=4$
soit encore $(x-1)^2+y^2=5$ qui correspond au cercle de centre $(1{,}0)$ milieu de [AB] et de rayon $\sqrt{5}=AB/2$