Cours : Produit scalaire

On a vu, en début d'année, que les vecteurs permettent de traiter rapidement certains problèmes de géométrie. Le parallélisme grâce à la colinéarité, et l'orthogonalité grâce au produit scalaire.

I. Qu'est ce que le produit scalaire ?

Le **produit scalaire** de deux vecteurs est **un nombre** proportionnel à la longueur de chaque vecteur et dépendant de l'angle qu'ils forment. L'opérateur du produit scalaire se note avec un point au lieu du ×.
Il existe quatre expressions équivalentes permettant de définir le produit scalaire. Chacune a son intérêt, mais le plus important, c'est qu'un produit scalaire nul traduise l'orthogonalité.

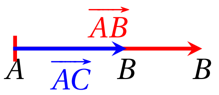
Définition Primaire :

Le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le **nombre réel**, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, égal à $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times cos(\widehat{BAC})$

Rappel : Dans un repère orthonormé, tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une norme $\|\vec{u}\|$ égale à $\sqrt{a^2+b^2}$

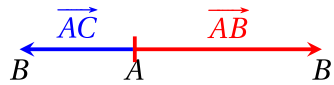
Remarque :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens



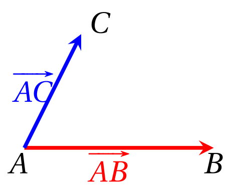
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et sens contraire



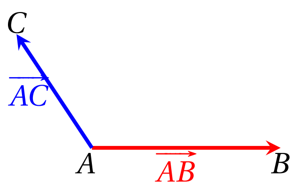
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

- Si $\widehat{BAC} \in [0\,;90[$ (angle aigu)



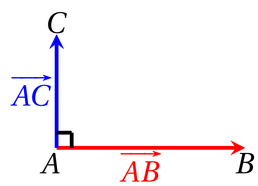
alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$

- Si $\widehat{BAC} \in [90\,;180[$ (angle obtus)



alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$

- Si $\widehat{BAC} = 90°$ (angle droit)

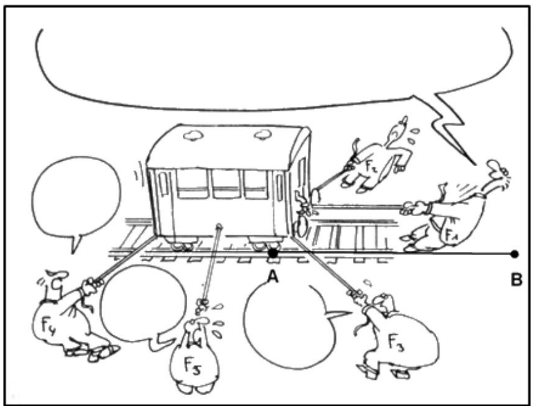


alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Remarque : *En Physique, le produit scalaire permet de calculer le travail d'une force, c'est à dire l'énergie nécessaire lors d'un déplacement.*

Qui dit quoi ?

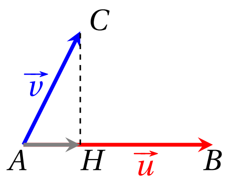
- « Je résiste ! »
- « Je contribue comme je peux... »
- « C'est moi le meilleur ! »
- « Je ne sers à rien ! »



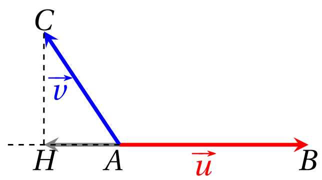
Propriété : Deuxième expression

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soient trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ avec H projeté orthogonal de C sur (AB)

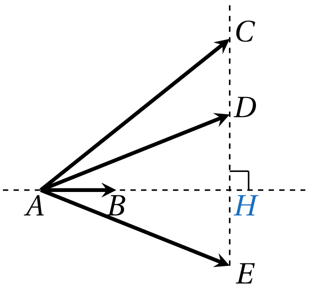


$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

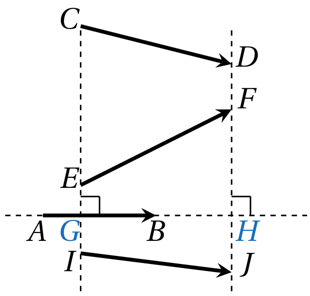


$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times -AH$

Remarques :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \times AH$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times GH$

Propriété : Troisième expression

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

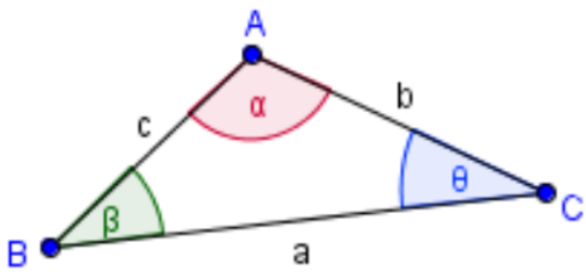
Conséquence : Théorème d'Al-kashi (*Pythagore généralisé*)

Si ABC est un triangle avec $AB = c \quad AC = b \quad BC = a$

et $\widehat{A} = \alpha \quad \widehat{B} = \beta \quad \widehat{C} = \theta$

alors :

- $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$



Demo : ....

....

....

Propriété : Quatrième expression

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

II. Règles de calcul

Carré scalaire : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Demo : ....

....

....

Symétrie : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

Demo : ....

....

....

Linéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et $k \in \mathbb{R}$, on a :

$\vec{u}\,.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

$\vec{u}\,.(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$

Identité remarquable : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Demo : ....

....

....

Théorème d'orthogonalité : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls sont orthogonaux si et seulement si } \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0}$

Demo : ....

....

....

Attention : Dire que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ ne signifie pas que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

III. Applications

Exemple 1 : Montrer que des vecteurs sont orthogonaux

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

....

....

Exemple 2 : Montrer que des droites sont perpendiculaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère les points $A(1 ; -1)$, $B(3 ; 3)$, $C(-4 ; 4)$ et $D(2 ; 1)$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exemple 3 : Déterminer la mesure d'un angle géométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{u}.\vec{w}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$. En déduire la mesure de l'angle géométrique associé à l'angle orienté $(\vec{u} ; \vec{w})$.

Exemple 4 : Calculer une longueur

Un triangle ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 7$ et $\widehat{CAB} = 60°$. Déterminer la longueur du coté BC.

II Règles de calcul(corrigé)

Carré scalaire : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

En effet : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u},\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.

Symétrie : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

En effet : $\begin{cases} \vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\theta) \\ \vec{v}\,.\,\vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\theta) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\theta) \end{cases}$

Linéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et $k \in \mathbb{R}$, on a :

$$\vec{u}\,.\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$$

$$\vec{u}\,.(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$$

Identité remarquable : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Théorème d'orthogonalité : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non nuls sont orthogonaux si et seulement si } \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0}$

En effet : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\theta)$ avec θ l'angle entre les deux vecteurs

$\iff cos(\theta) = 0$ °

$\iff \theta = \pm 90° + k \times 180°\ (k \in \mathbb{Z})$

Attention : Dire que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ ne signifie pas que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

III Applications(corrigé)

Exemple 1 : Montrer que des vecteurs sont orthogonaux

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' = 2 \times 3 + 1 \times (-6) = 6 - 6 = 0$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Exemple 2 : Montrer que des droites sont perpendiculaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
On considère les points $A(1\,;-1)$, $B(3\,;3)$, $C(-4\,;4)$ et $D(2\,;1)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Cela revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\3-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2-(-4)\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=xx'+yy'=2\times6+4\times(-3)=12-12=0.$

Donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

Exemple 3 : Déterminer la mesure d'un angle géométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
En déduire la mesure de l'angle géométrique associé à l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

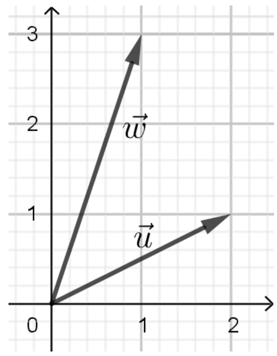
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=xx'+yy'=2\times1+1\times3=2+3=5.$
- $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$ $\quad\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$

D'après la définition 1 du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\widehat{BAC})$$

$$5=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\cos(\widehat{BAC})$$ *C'est une équation dont l'inconnue est* $\cos(\widehat{BAC})$

$$\cos(\widehat{BAC})=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt{25\times2}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

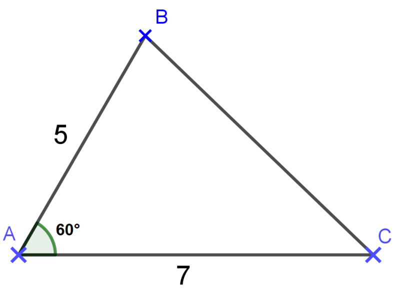


Ainsi, la mesure de l'angle $(\widehat{BAC})$ est 45°.

(Voir le dessin ci-contre pour le signe de l'angle orienté)

Exemple 4 : Calculer une longueur

Un triangle ABC est tel que $AB=5$, $AC=7$ et $\widehat{CAB}=60°$. Déterminer la longueur du coté BC.



On utilise une formule d'Al-Kashi :

$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$BC^2=5^2+7^2-2\times5\times7\times\cos(60)$

$BC^2=25+49-70\times\dfrac{1}{2}$

$BC^2=74-35=39$

Une longueur étant toujours positive, $\quad BC=\sqrt{39}$.