Série 1

Exercice 1

Dans les cas ci-dessous, exprimer les 4 premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = (u_n+1)^2$.
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.
- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.
- $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$.
- $n \geqslant 0$ et $u_n = 2\,n + 5$.
- $n \geqslant 1$ et $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$.
- $n \geqslant 1$ et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Corrigé

- $u_0 = -1$; $u_1 = (u_0+1)^2 = (-1+1)^2 = 0$; $u_2 = 1$; $u_3 = 4$
- $u_0 = 1$; $u_1 = 2u_0 + 5 = 2\times 1 + 5 = 7$; $u_2 = 19$; $u_3 = 43$
- $u_0 = 2$; $u_1 = 2u_0 + 5 = 2\times 2 + 5 = 9$; $u_2 = 23$; $u_3 = 51$
- $u_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{1}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3}$; $u_3 = \dfrac{3}{5}$

==

- $u_1 = 1$; $u_2 = u_1 + 1 = 1+1 = 2$; $u_3 = u_2 + 2 = 4$; $u_4 = 7$
- $u_0 = 2\times 0 + 5 = 5$; $u_1 = 2\times 1 + 5 = 7$; $u_2 = 9$; $u_3 = 11$
- $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $u_3 = \dfrac{3}{2}$; $u_4 = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$
- $u_1 = -1$; $u_2 = \dfrac{1}{2}$; $u_3 = \dfrac{-1}{3}$; $u_4 = \dfrac{1}{4}$

Exercice 2

Pour les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ suivantes, exprimer en fonction de n les termes u_{n+1}, $u_n + 1$, $u_{2\,n}$, $u_{2\,n+1}$, u_{n-1} :

- $u_n = 3\,n^2 - 1$.
- $u_n = \dfrac{2\,n-1}{n+2}$.

Corrigé

Première suite :

$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 1 = 3n^2 + 6n + 2$

$u_n + 1 = 3(n)^2 - 1 + 1 = 3n^2$

$u_{2n} = 3(2n)^2 - 1 = 12n^2 - 1$

$u_{n-1} = 3(n-1)^2 - 1 = 3n^2 - 6n + 2$

Deuxième suite :

$u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+3}$

$u_n + 1 = \dfrac{3n+1}{n+2}$

$u_{2n} = \dfrac{4n-1}{2n+2}$

$u_{n-1} = \dfrac{2n-3}{n+1}$

Exercice 3 Une curiosité venant de Syracuse

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie de la manière suivante :

- u_0 est un entier strictement positif donné ;

• pour tout entier n, on pose : $\begin{cases} u_{n+1} = 3\,u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair.} \end{cases}$

1. On choisit $u_0 = 1$.

   Déterminer u_1, u_2, ... jusqu'à ce qu'on puisse remarquer quelque chose.

2. Même question avec avec $u_0 = 4$, puis $u_0 = 5$.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Corrigé

Pour $u_0 = 1$	Pour $\underline{u_0 = 4}$	Pour $u_0 = 5$
$\underline{u_1 = 4}$	$\underline{u_1 = 2}$	$u_1 = 16$
$\underline{u_2 = 2}$	$\underline{u_2 = 1}$	$u_2 = 8$
$\underline{u_3 = 1}$	$u_3 = 4$	$\underline{u_3 = 4}$
$u_4 = 4$	...	$\underline{u_4 = 2}$
...		$\underline{u_5 = 1}$
		$u_6 = 4\ldots$

Exercice 4

Dire si les suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ sont géométriques ou non.

a) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$ b) $v_n = n^2$ c) $w_n = 5^{2n}$

Corrigé

1. $u_0 = 3$; $u_1 = \dfrac{9}{2}$; $u_2 = \dfrac{27}{4}$ ...

   On peut penser qu'à chaque étape on multiplie par $\dfrac{3}{2}$ en partant de 3. En effet,

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{3^{n+2}}{2^{n+1}}}{\dfrac{3^{n+1}}{2^n}} = \dfrac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{3^{n+1}} = \dfrac{3}{2}$ La suite est bien géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$.

2. $v_0 = 0$; $v_1 = 1$; $v_2 = 4$ ...

   Pour passer de $v_1 = 1$ à $v_2 = 4$ on multiplie par 4 ce qui n'est pas le cas lors du passage de $v_0 = 0$ à $v_1 = 1$.

   Cette suite ne peut être géométrique. *(Par quel nombre faut-il multiplier pour passer de* 0 *à* 1 *?)*

3. $w_0 = 1$; $w_1 = 25$; $w_2 = 625$ ...

   On peut penser qu'à chaque étape on multiplie par 25 en partant de 1. En effet,

   $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{5^{2(n+1)}}{5^{2n}} = \dfrac{5^{2n+2}}{5^{2n}} = 5^2 = 25.$ La suite est bien géométrique de raison 25

Exercice 5

Soit une suite (u_n), géométrique, de raison q. Pour chaque cas, retrouver ce qui est cherché.

1. $u_0 = 16$ et $q = \dfrac{1}{2}$, calculer u_8
2. $u_6 = 2$ et $q = \dfrac{1}{4}$, calculer u_0
3. $u_8 = -4$, $u_{10} = -36$ et $q > 0$, calculer q
4. $u_7 = 54$ et $u_{12} = 13\,122$, calculer u_2

Corrigé

1. $u_8 = u_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^8 = \dfrac{16}{2^8} = \dfrac{2^4}{2^8} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

2. $u_6 = u_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^6$ donc $2 = u_0 \times \dfrac{1}{4096}$ c'est à dire $u_0 = 8192$

3. $q^2 = 9$ donc $q = -3$ ou $q = 3$

4. $13122 \div 54 = 243$

   En 5 étapes on a multiplié par 243. De u_2 à u_7 il y a aussi 5 étapes donc $u_2 = 54 \div 243 = \dfrac{27 \times 2}{27 \times 9} = \dfrac{2}{9}$

   (On a aussi : $243 = 3^5$ $q = 3 \ldots$*)*

Exercice 6

Soit u la suite telle que $u_0 = -4$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n$.

1. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

2. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -262\,144$.

Corrigé

1. (u_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = -4$ donc $u_n = -4 \times (-2)^n$

2. Soit on connaît ses puissances de 2 : $262144 = 2^{18}$

   Soit on regarde la racine carrée : $\sqrt{262144} = 512 = 2^9$ donc $262144 = 2^{18}$

   Soit on utilise un tableau de valeurs sur la calculatrice avec la fonction $f(x) = 2^x$

   Bref ... $-262144 = -2^{18} = -4 \times 2^{16}$ donc $n = 16$ (16 étapes)

   On pourrait aussi utiliser un programme Python :

```python
u = -4
n = 0
while u != -262144:
    u = u*(-2)
    n = n + 1

print(u)
print(n)
```

```
-262144
16
```

Exercice 7

Les suites définies ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

1. $u_n = \dfrac{3n+1}{2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. $v_n = n^2 - n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Corrigé

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3(n+1)+1}{2} - \dfrac{3n+1}{2} = \dfrac{3n+3+1-3n-1}{2} = \dfrac{3}{2}$

   On a donc $u_{n+1} = u_n + \dfrac{3}{2}$ $\boxed{(u_n) \text{ est donc bien une suite arithmétique de raison } \dfrac{3}{2}}$

2. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n$

   On a donc $u_{n+1} - u_n \neq$ constante $\boxed{(u_n) \text{ n'est donc pas une suite arithmétique}}$

Exercice 8

Soit une suite (u_n) arithmétiques, de raison r. Pour chaque cas déterminer ce qui est demandé.

1. $u_0 = 4$ et $r = 2$. Déterminer u_{35}
2. $u_1 = 3$ et $r = -2$. Déterminer u_{17}
3. $u_2 = 3$ et $u_{14} = 9$. Déterminer la raison r
4. $u_4 = 1$ et $u_9 = 4$. Déterminer u_{21}

Corrigé

Soit une suite (u_n) arithmétiques, de raison r.

1. $u_0 = 4$ et $r = 2$.

   (u_n) arithmétique donc $u_n = u_0 + nr = 4 + 2n$ et donc $u_{35} = 4 + 2 \times 35$ c'est à dire $\boxed{u_{35} = 74}$

2. $u_1 = 3$ et $r = -2$.

   (u_n) arithmétique donc $u_n = u_1 + (n-1)r = 3 - 2(n-1)$ et donc $u_{17} = 3 - 2 \times 16$ $\boxed{u_{17} = -29}$

3. $u_2 = 3$ et $u_{14} = 9$

   (u_n) arithmétique donc $u_n = u_0 + nr$. On a donc $\begin{cases} u_2 = u_0 + 2r = 3 \\ u_{14} = u_0 + 14r = 9 \end{cases}$

   En résolvant ce système, on peut trouver u_0 et r. On trouve $\boxed{u_0 = 2 \text{ et } r = \dfrac{1}{2}}$

4. $u_4 = 1$ et $u_9 = 4$.

   (u_n) arithmétique donc $u_n = u_0 + nr$. On a donc $\begin{cases} u_4 = u_0 + 4r = 1 \\ u_9 = u_0 + 9r = 4 \end{cases}$

   En résolvant ce système, on peut trouver u_0 et r. On trouve $\boxed{u_0 = -\dfrac{7}{5} \text{ et } r = \dfrac{3}{5}}$

   On peut alors calculer $u_{21} = -\dfrac{7}{5} + 21 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{-7+63}{5} = \dfrac{56}{5}$

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite arithmétique telle que $u_4 = 9$ et $u_1 + u_2 + ... + u_8 = 92$.

1. Déterminer la raison r de la suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Corrigé

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite arithmétique telle que $u_4 = 9$ et $u_1 + u_2 + ... + u_8 = 92$.

1. Déterminer la raison r de la suite. (u_n) arithmétique donc $u_n = u_1 + (n-1)r$.

   On a donc $u_1 + u_2 + ... + u_8 = u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + ... + (u_1 + 7r) = 8u_1 + 28r = 92$.

   On a aussi $u_4 = u_1 + 3r = 9$

   Résolvons $\begin{cases} 8u_1 + 28r = 92 \\ u_1 + 3r = 9 \end{cases}$.

   $$\begin{cases} 8u_1 + 28r = 92 \\ u_1 + 3r = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1 + 28r = 92 \\ u_1 = 9 - 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(9-3r) + 28r = 92 \\ u_1 = 9 - 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4r = 20 \\ u_1 = 9 - 3r \end{cases}$$

   On trouve $\boxed{u_1 = -6 \text{ et } r = 5}$

2. $u_n = u_1 + (n-1)r$ c'est à dire $\boxed{u_n = -6 + 5(n-1)}$

Exercice 10

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. En calculant les premiers termes de la suite (u_n), que peut-on dire de la nature de la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

   Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. A l'aide de la calculatrice, estimer vers quelle valeur va tendre cette suite pour des valeurs de n très grandes.

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. $u_0 = 1, \quad u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}, \quad u_2 = \dfrac{5}{8}$

   $u_1 - u_0 = -\dfrac{1}{4}$ et $u_2 - u_1 = -\dfrac{1}{8} \neq -\dfrac{1}{4}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

   $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{6} \neq \dfrac{3}{4}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

   $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{4}$ puisque $u_n = v_n + \dfrac{1}{2}$.

   $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}v_n$ ce qui implique que $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{1}{2}}$

3. D'après le cours de première $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

   On a donc $u_n = v_n + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2}$

4. A l'aide de la calculatrice, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$

   Remarque : On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ puisque $-1 < q < 1$.

   D'où la limite de v_n à qui on rajoute $\dfrac{1}{2}$ par rapport à v_n

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2. Que peut-on dire de la nature de la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Ces valeurs sont-elles compatibles avec une suite géométrique ?
   b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis de n. Combien vaut u_{10} ?
4. A l'aide de la calculatrice, estimer vers quelle valeur va tendre cette suite pour des valeurs de n très grandes.

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. $u_0=3 \quad u_1=\dfrac{2}{1+3}=\dfrac{1}{2} \quad u_2=\dfrac{4}{3}$
   $u_1-u_0=-\dfrac{5}{2}$ et $u_2-u_1=\dfrac{5}{6}\neq-\dfrac{5}{2}$ ce qui implique que (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{8}{3}\neq\dfrac{1}{6}$ ce qui implique que (u_n) n'est pas géométrique.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.
   a) $v_0=\dfrac{3-1}{3+2}=\dfrac{2}{5}$, $\quad v_1=-\dfrac{1}{5}$ et $v_2=\dfrac{1}{10}$. Remarquons que $v_1=-\dfrac{1}{2}v_0$ et $v_2=-\dfrac{1}{2}v_1$
   b) $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\dfrac{2}{1+u_n}-1}{\dfrac{2}{1+u_n}+2}=\frac{\dfrac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{2+2+2u_n}{1+u_n}}=\frac{1-u_n}{1+u_n}\times\frac{1+u_n}{4+2u_n}=\frac{1-u_n}{4+2u_n}$$
   $$v_{n+1}=\frac{-(u_n-1)}{2(2+u_n)}=\frac{-1}{2}\times\frac{u_n-1}{2+u_n}=-\frac{1}{2}\times v_n.$$
   $\boxed{(v_n)\text{ est donc géométrique de raison }-\dfrac{1}{2}}$
   c) D'après le cours de première $v_n=v_0\times q^n=\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$
3. $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2} \quad\Leftrightarrow\quad v_n(u_n+2)=u_n-1 \quad\Leftrightarrow\quad v_nu_n+2v_n=u_n-1 \quad\Leftrightarrow\quad u_n(v_n-1)=-2v_n-1$

   On en déduit que $$u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}=\frac{-2\times\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}$$

   On a donc $\boxed{u_n=\dfrac{-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1}\quad\text{et}\quad u_{10}=\dfrac{-\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10}-1}{\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{10}-1}}$
4. A l'aide de la calculatrice, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2\,u_n+1}$, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
On admet donc que $u_n \neq 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) est arithmétique.
2. Déterminer alors l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire celle de u_n en fonction de n.

Corrigé

Soient (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2\,u_n + 1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (Important : $u_n \neq 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$).

1. Si(v_n) est arithmétique alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $v_{n+1} = v_n + r$ et donc $v_{n+1} - v_n = r$
   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\dfrac{u_n}{2u_n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2u_n+1}{u_n} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2u_n+1-1}{u_n} = \dfrac{2u_n}{u_n} = 2$
   La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2.
2. D'après le cours de première $v_n = v_0 + nr = 1 + 2n$ car $v_0 = \dfrac{1}{u_0} = 1$
   $v_n = \dfrac{1}{u_n} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \dfrac{1}{v_n}$. On a donc $\boxed{u_n = \dfrac{1}{1+2n}}$

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique de raison 0,5 telle que $u_1 = -1$.

1. Calculer u_{100}.
2. Déterminer à partir de quel rang N on a $u_N \geqslant 50$.

Corrigé

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique de raison 0,5 telle que $u_1 = -1$.

1. (u_n) est arithmétique de raison 0.5 avec $u_1 = -1$ donc $u_n = -1 + 0.5(n-1)$
   donc $u_{100} = -1 + 0.5 \times 99$ c'est à dire $\boxed{u_{100} = 48.5}$
2. On cherche un N tel que $u_N \geqslant 50$
   $u_N \geqslant 50 \quad \Leftrightarrow \quad -10.5(n-1) \geqslant 50 \quad \Leftrightarrow \quad 0.5n - 1.5 \geqslant 50 \quad \Leftrightarrow \quad 0.5n \geqslant 51.5 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{n \geqslant 103}$

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -2\,n^2 + 1$, pour $n \geqslant 0$.

1. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
2. Comment semblent se comporter les termes de la suite (u_n) ?
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
4. Pour n très très grand, que peut-on dire de u_n ?

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -2\,n^2 + 1$, pour $n \geqslant 0$.

1. $u_0 = 1 \quad u_1 = -1 \quad u_2 = -7 \quad u_3 = -17 \quad u_4 = -31$

2. Les termes de la suite (u_n) semblent être de plus en plus petits. La suite serait peut-être décroissante?

3. $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-2(n+1)^2+1) - (-2n^2+1) \\ &= -2(n^2+2n+1)+1-(-2n^2+1) \\ &= -2n^2-4n-2+1+2n^2-1 \\ &= -4n-2 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = -4n-2$ est clairement une expression négative pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $u_{n+1} \leqslant u_n$

et donc $\boxed{(u_n) \text{ est bien décroissante}}$.

4. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (-4n-2) = -\infty}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer u_1, u_2 u_3 et u_4.
2. Déterminer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. En déduire les variations de (u_n).

   Qu'aurait pu-t-on également faire pour déterminer les variations de cette suite?
4. Pour n très très grand, que peut-on dire de u_n?

Corrigé

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

1. $u_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\quad u_2 = \dfrac{1}{6}$, $\quad u_3 = \dfrac{1}{12}$ et $u_4 = \dfrac{1}{20}$.

2. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1+1}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{\dfrac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

$\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+2}}$

3. $n < n+2 \Rightarrow$ pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad \dfrac{n}{n+2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} < u_n$ $\quad \boxed{(u_n) \text{ est donc décroissante}}$

   Remarques : On aurait pu calculer $u_{n+1} - u_n$ et chercher son signe (voir exo précédent)

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \ldots = \dfrac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0$ puisque $n > 0$

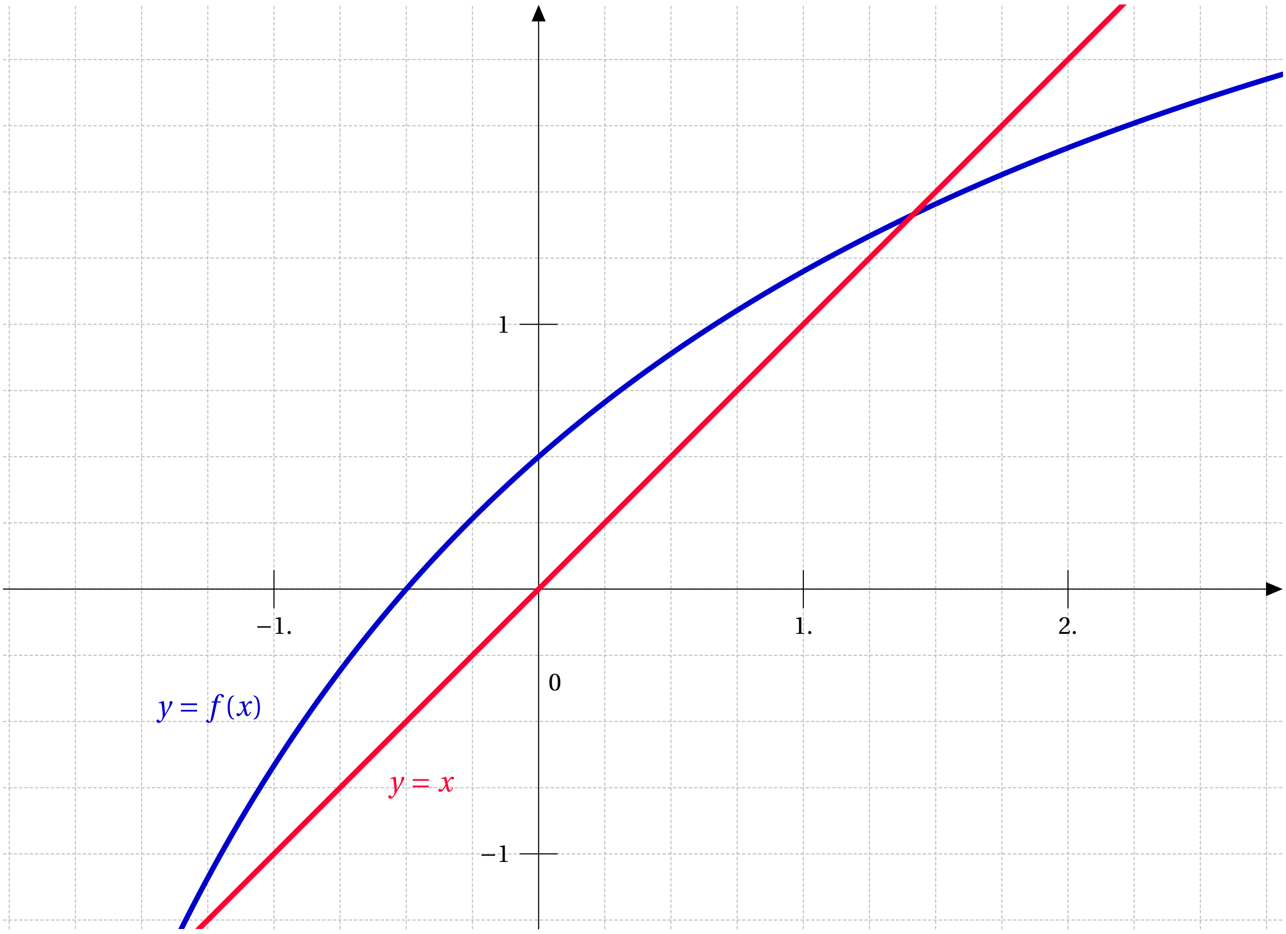
4. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 0}$ puisque $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1) = +\infty \end{cases}$

Exercice 16

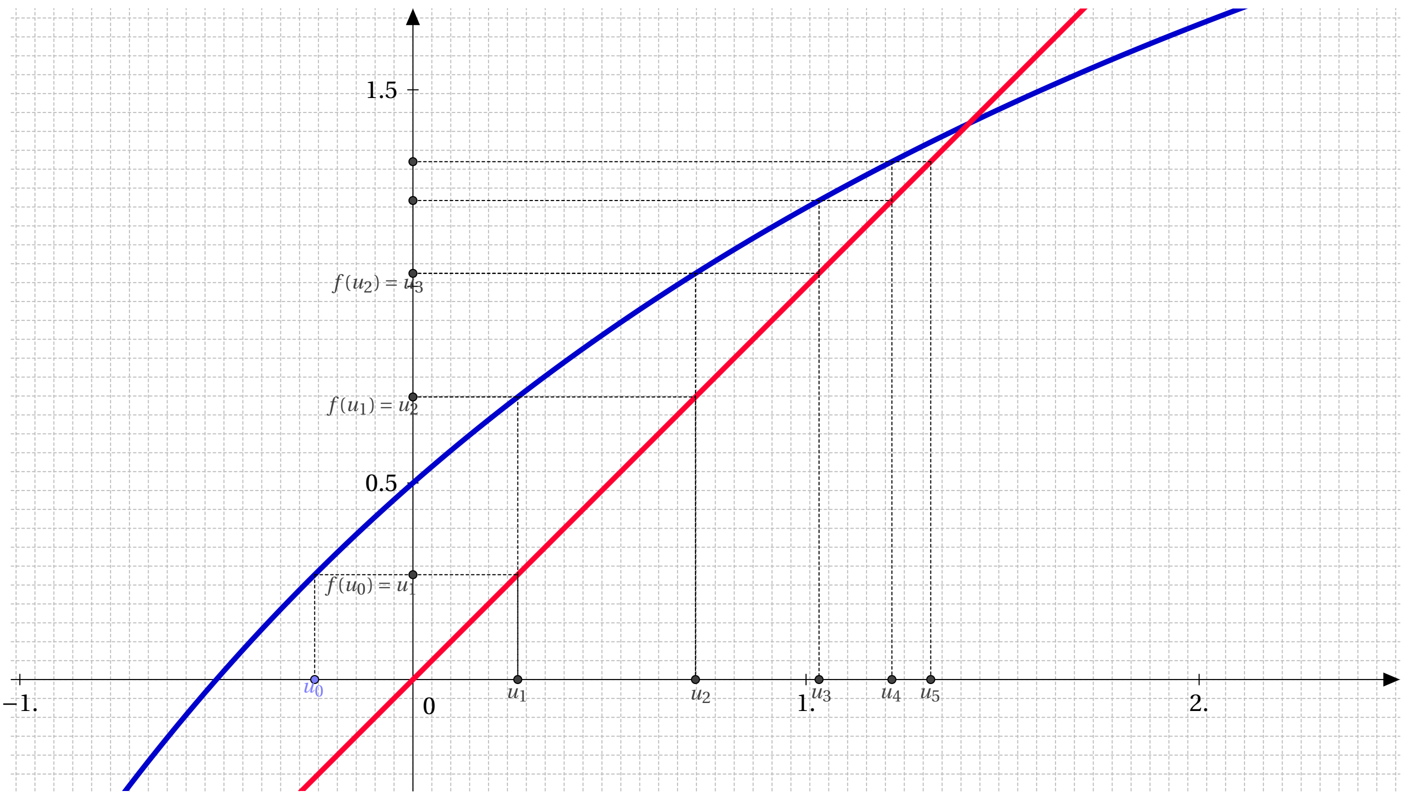
On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Soit v_n la suite définie par $v_0 = -0{,}25$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

Construire graphiquement la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n) sur l'axe des abscisses.



Corrigé



Exercice 17

Le contrat de location d'un bien immobilier fixe le loyer mensuel à 500 € la première année, réévalué de 2 % chaque année à la date anniversaire du contrat.

On note l_n le montant en euro du loyer mensuel la n-ième année après la signature du contrat (n nombre entier naturel).

Ainsi, $l_0 = 500$.

1. Calculer l_1 et l_2.

2. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n.

3. Calculer le montant total des loyers durant neuf années de location. Arrondir au centième.

4. Avec la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le loyer mensuel dépassera 1 000 €.

Corrigé

l_n montant en euro du loyer mensuel la n-ième année après la signature du contrat (n nombre entier naturel).

Ainsi, $l_0 = 500$.

1. Augmenter une quantité de 2% revient à la multiplier par $(1+2\%)$ c'est à dire 1.02.

$u_1 = 500 \times 1.02 = 510 \quad u_2 = 510 \times 1.02 = 520.2$

2. $l_{n+1} = l_n \times 1.02$. On reconnait une suite géométrique de raison 1.02

3. Calculer le montant total des loyers durant 9 ans revient à calculer $S = 12 \times l_0 + 12 \times l_1 + \ldots + 12 \times l_8$).

Or $S = 12 \times l_0 + 12 \times l_1 + 12 \times l_3 + \ldots + 12 \times l_8$

$$
\begin{aligned}
&= 12 \times (l_0 + l_1 + \ldots + l_8) \\
&= 12 \times (l_0 + l_0 \times 1.02 + \ldots + l_0 \times 1.02^8). \\
&= 12 l_0 \times (1 + 1.02 + \ldots + 1.02^8) \text{ avec } l_0 = 500 \\
&= 12 \times 500 \times \left(\frac{1-1.02^9}{1-1.02}\right). \\
&\approx 58\,528.
\end{aligned}
$$

On aurait pu calculer les neuf termes et les ajouter mais connaitre la formule du cours pour la somme fait gagner du temps et évite ces calculs de loyers.

4. On cherche la valeur de N (nombre d'année passée) telle que $l_N > 1000$

$l_N > 1\,000 \quad \Leftrightarrow \quad 500 \times 1.02^N > 1\,000 \quad \Leftrightarrow \quad 1.02^N > 2$ mais on ne sait pas résoudre cette équation

Avec la calculatrice, on trouve $N = 36$ puisque $u_{35} = 999{,}94$ et $u_{36} = 119{,}94$

Exercice 18

1. Calculer $S_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{20}$.

2. Calculer $S_2 = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.

3. Calculer $S_3 = 7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + 7 \times 2^{10}$.

4. Calculer $S_4 = 2 + (2+2) + (4+2) + (6+2) + (8+2) + (10+2) + \ldots + (16+2)$.

5. Calculer $S_5 = 3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 103$.

Les questions 1) 2) et 3) s'appuient sur la somme de termes consécutifs d'une suite géométriques, les questions 4) et 5) sur celle de termes consécutifs d'une suite arithmétique

1. Calculer $S_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{20}$.

   On reconnaît une somme de la forme $1 + q + q^2 + ... + q^{20}$, avec $q = \frac{1}{5}$.

   D'après le cours, on a donc : $S_1 = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{21}}{1-\frac{1}{5}} = \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{21}\right) \times \frac{5}{4} \approx 1{,}25$

   ATTENTION, c'est bien un arrondi...

2. Calculer $S_2 = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.

   C'est la même chose que pour S_1 sauf qu'il y a le terme $u_0 = 5$ qui est mis en évidence.

   On a alors : $S_2 = 5\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right) = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{13}}{1-\frac{1}{3}}$

   Donc, $S_2 = 5 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{13}\right) \times \frac{3}{2} = 7{,}5 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{13}\right) \approx 7{,}499$.

3. $S_3 = 7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + 7 \times 2^{10} = 7(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}) = 7 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = -7(1-2^{11})$

   Donc, $S_3 = 14\,329$.

4. Calculer $S_4 = 2 + (2+2) + (4+2) + (6+2) + (8+2) + (10+2) + ... + (16+2)$.

   On reconnaît les termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 2. En appliquant la formule du cours : il y a 9 termes 2,4,6,8,10,12,14, 16 et $18 = 2 + 2 \times 8$

   $S_4 = 9 \times \frac{2+18}{2} = 9 \times 10 = 90$

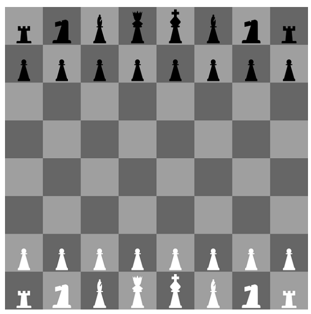
5. Calculer $S_5 = 3 + 7 + 11 + 15 + ... + 103$.

   Ici ce n'est pas écrit explicitement, mais on reconnaît la somme des termes d'une suite arithmétique, de raison 4 et de premier terme 3.

   On va jusqu'à $103 = 3 + 4 \times 25$, donc, il y a 26 termes.

   Ainsi, $S_5 = 26 \times \frac{3+103}{2} = 26 \times 53 = 1\,378$

Exercice 19



On raconte que l'inventeur de l'échiquier demanda, comme humble récompense, un grain de blé sur la première case, deux grains de blé sur la deuxième case, 4 grains de blé sur la troisième case, 8 grains sur la quatrième et ainsi de suite en doublant à chaque case le nombre de grains de blé, jusqu'à la 64$^{\text{ème}}$ case.

1. Donner le nombre de grains de blé correspondant à la $n^{\text{ème}}$ case.
2. Calculer le nombre total de grains à donner à l'inventeur.
3. Un grain de blé pèse 0,05 g. La production mondiale de blé en 1995 était de 600 millions de tonnes.

   Cette production suffirait-elle à payer l'inventeur ?

Corrigé

C'est une énigme très connue et surprenante.

1. 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16... Nous avons une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 que nous allons noter u.

   Ainsi, $u_n = 1 \times 2^n = 2^n$ correspond au nombre de grains de blé sur la $(n+1)^e$ case.

   Sur la n^e case, il y a donc $u_{n-1} = 2^{n-1}$ grain de blé.

2. Il faut donc calculer la somme :

   $S_{63} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{63} = u_0 \times \dfrac{1-2^{63+1}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551616$

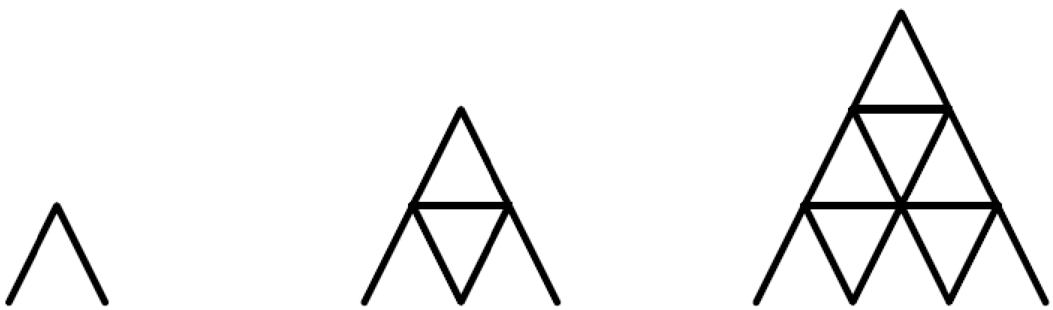
3. $0{,}05g = 0{,}00005kg = 0{,}00000005tonne$.

   Puis, $18446744073709551616 \times 0{,}00000005 = 922337203685.4775 > 600000000$.

   La production mondiale en 1995 ne suffirait pas.

Exercice 20

On souhaite savoir combien de cartes sont nécessaires pour construire un château de cartes de n étages avec $n \in \mathbb{N}$. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite qui donne le nombre de cartes nécessaires pour construire la base dans un château de n étages.



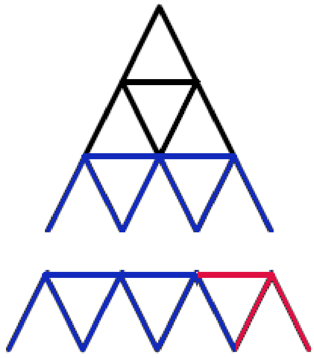
Premier étage $u_1 = 2$ — Deux étages et $u_2 = 5$ — 3 étages

1. Déterminer une relation de récurrence qui lie u_{n+1} et u_n ; en déduire la nature de (u_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Calculer le nombre de cartes nécessaires pour construire un château de 8 étages.
3. J'ai dix jeux de 32 cartes. Combien d'étages entiers mon château va-t-il avoir ?

Corrigé

1. $u_1 = 2$; $u_2 = 5$; $u_3 = 8$... On pense à une suite arithmétique de raison $r = 3$.

   En décalant l'étage précédent vers le bas, on constate qu'il faut ajouter 3 cartes pour obtenir la base :



u est donc une suite arithmétique de raison $r = 3$ de premier terme $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.

Cette suite est croissante (arithmétique et $r > 0$). On a aussi une forme explicite :

$u_n = u_1 + r(n-1) = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$.

2. Il faut donc calculer la somme :

   $u_1 + u_2 + \ldots + u_8$ Attention à la formule du cours qui s'applique sur une somme commençant à u_0.

   Il nous faut $u_8 = 3 \times 8 - 1 = 23$.

   Plusieurs possibilités ensuite :

   - Soit on a compris que la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut s'écrire :

   $$\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}$$

   - Soit on ajoute à la somme $u_0 = -1$ pour appliquer la formule du cours puis en enlèvera -1 à la fin ;
   - Soit on décale les indices les indices de façon à faire correspondre la somme à la formule du cours :

   Posons $S_7 = v_0 + v_1 + \ldots + v_7 = 2 + 5 + \ldots + 23 = \dfrac{(v_0 + v_7) \times (7+1)}{2} = \dfrac{25 \times 8}{2} = 100$

   Il faut 100 cartes pour construire un château de 8 étages.

3. La calculatrice donne la preuve ici :

   Pour 4 étages il faut 25 cartes et pour 5 étages il faut 39 cartes.

   Donc 4 étages au maximum avec 32 cartes.

Exercice 21

Pour recouvrir un toit en forme de cône, un couvreur dispose les ardoises en rangs successifs en partant du bas. La pointe du toit est recouverte de zinc.

Sur le premier rang il y a 213 ardoises, 207 sur le deuxième rang, 201 sur le troisième rang, 195 sur le quatrième rang ... et ainsi de suite en suivant la même progression.

On pose, u_n le nombre d'ardoises sur le $(n+1)^{\text{ième}}$ rang.

1. Quelles sont les valeurs de u_0 et de u_1 ?
2. Après avoir précisé la nature de la suite (u_n), exprimer u_n en fonction de n.
3. Sachant que le dernier rang comporte 9 ardoises, montrer que le nombre total de rangs à mettre en place pour couvrir le toit est de 35.

4. Calculer le nombre total d'ardoises nécessaires pour couvrir le toit.
5. Malheureusement, on ne dispose que d'un stock de 2 000 ardoises de ce type.

   Combien de rangs entiers cela aura-t-il permis de couvrir ?

Corrigé

1. D'après l'énoncé, $u_0 = 213$ et $u_1 = 207$
2. A chaque nouvelle rangée, on enlève 6 ardoises, donc on a une suite arithmétique de premier terme 213 et de raison -6.

   D'après le cours, $u_n = u_0 + nr = 213 - 6n$.
3. On cherche n tel que $u_n = 9$, c'est à dire : $213 - 6n = 9$.

   En résolvant cette équation, on trouve $n = 34$.

   u_0 étant le premier rang, u_1 le deuxième, u_{34} correspond bien au $35^{\text{ème}}$ rang.
4. On doit calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{34}$.

   D'après le cours, $S = 35 \times \dfrac{213+9}{2} = 35 \times 111 = 7770$.

   Donc il faut 7 770 ardoises pour couvrir ce toit.
5. On cherche n tel que $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n \leqslant 2000$

   En remplaçant avec la formule du cours, on doit avoir : $(n+1) \times \dfrac{213 + (213-6n)}{2} \leqslant 2000$,

   soit $(n+1)(213-3n) \leqslant 2000$, ce qui donne en développant : $-3n^2 + 210n - 2000 \leqslant 0$.

   On résout donc $-3n^2 + 210n - 2000 = 0$ et on fera un tableau de signes.

   $-3n^2 + 210n - 200 = 0$ donne : $n_1 = \dfrac{105 + 5\sqrt{201}}{3} \approx 58{,}63$ et $n_2 = \dfrac{105 - 5\sqrt{201}}{3} \approx 11{,}4$.

   On a $a = -3 < 0$ on en déduit le tableau de signes :

x	0		n_2		34
Signe de $-3n^2 + 210n - 2000$		$-$	0	$+$	

   Donc, jusqu'au $11^{\text{ème}}$ rang, on utilisera moins de 2000 ardoises et à partir du $12^{\text{ème}}$ on en aura utilisé plus.

Exercice 22

Sur une grille à mailles carrées d'un centimètre de côté, on place une boule de neige de dix centimètres de diamètre, bien centrée.

Elle fond et son volume est divisé par huit à chaque heure écoulée.

On fait une observation toutes les heures. Dans combien de temps constaterons-nous que ce qui reste de la boule n'est plus retenu par la grille ?

Corrigé

On peut calculer le volume de la boule initial et regarder ce qu'il se passe chaque heure, de cette façon, on trouvera au bout de combien de temps le diamètre de la boule sera plus petit que 1 cm.

Sinon, comme le volume est divisé par 8, on sait que cela signifie que les aires sont divisées par 4 et les longueurs par 2 (notions d'agrandissement réduction de 3ème, ou triangles semblables)

Ainsi le diamètre de départ étant égal à 10 cm, on sait qu'en 10 heures le diamètre sera égal à 1cm et la boule passera donc à travers la maille...

en imaginant bien sûr que la boule ne s'effrite pas, ne se casse pas, ne fond pas de manière hétérogène..... Ce n'est pas la vraie vie....

Exercice 23

Pour rechercher la présence d'eau, on entreprend un forage.

Creuser le premier mètre coûte 90 euros, le second 110 euros, le troisième 130 euros et ainsi de suite en augmentant toujours de 20 euros le prix du mètre supplémentaire.

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, où u_n désigne le coût pour creuser le $n^{\text{ème}}$ mètre.

Par exemple, on a $u_3 = 130$.

1. Donner la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n.
2. Quel sera le prix pour creuser le $46^{\text{ème}}$ mètre ?
3. À partir de quelle profondeur le prix du mètre à creuser sera-t-il supérieur à 510 euros ?
4. On dispose d'une somme de 21 000 euros. Quelle profondeur peut-on atteindre ?

Corrigé

1. A chaque mètre supplémentaire, on ajoute 20 euros, donc la suite est arithmétique de raison 20 et de premier terme 90.

   Attention on commence à u_1....

   On en déduit grâce au cours que $u_n = u_1 + (n-1)r = 90 + 20(n-1) = 70 + 20n$
2. Le prix du $46^{\text{ème}}$ mètre correspond à u_{46}, ce qui donne : $70 + 20 \times 46 = 990$.
3. On cherche n tel que $u_n \geqslant 510$, ce qui donne $70 + 20n \geqslant 510$, soit : $n \geqslant 22$.

   Donc, à partir du $22^{\text{ème}}$ mètre le prix sera supérieur à 510 euros.
4. La somme totale pour creuser n mètre est égale à $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

   S est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 90, de dernier terme $70 + 20n$, on a donc, d'après le cours :

   $S = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2} = n \times \dfrac{160 + 20n}{2} = n(80 + 10n)$

   On veut alors $n(80 + 10n) = 21000$

   On doit résoudre : $10n^2 + 80n - 21000 = 0$, ce qui donne : $n_1 = 42$ ou $n_2 = -50$.

   Or, n est forcément un nombre supérieur ou égal à 1, on en déduit que pour 42 mètres creusés, on paiera 21 000 euros.

Exercice 24

Sophie veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B.

Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 € par an en 2019.

Partie A :

L'assureur A prévoit une augmentation de 10 euros par an. On note u_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur A en $2019+n$.

1. Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de cette suite ?
3. En déduire l'expression de u_n e fonction de n.
4. Quel sera le prix de la mutuelle en 2030 ?
5. Combien Sophie aura-t-elle payé en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?

Partie B :

L'assureur B prévoit une augmentation de 2 % par an. On note v_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur B en $2019+n$.

1. Déterminer la valeur de v_0 et v_1.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de cette suite ?
3. En déduire l'expression de v_n e fonction de n.
4. Quel sera le prix de la mutuelle en 2030 ?
5. Combien Sophie aura-t-elle payé en 25 ans si elle choisit l'assureur B ?

Partie C :

En utilisant la calculatrice, déterminer en quelle année le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A.

Corrigé

Partie A :

1. $u_0 = 300$ et $u_1 = 300+10 = 310$
2. $u_{n+1} = u_n + 10$. Il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = 10$.
3. La suite est arithmétique avec $u_0 = 300$ et $r = 10$: $u_n = u_0 + nr = 300 + 10n$.
4. $2030 - 2019 = 11$. $u_{11} = 300 + 11 \times 10 = 410$. Le prix de la mutuelle en 2030 sera de 410 euros.
5. Calcul de somme :

   $S_24 = u_0 + u_1 + \ldots + u_{24} = 300 + 310 + \ldots 540 = \dfrac{(300+540)\times(24+1)}{2} = 10500.$

   Sophie aura payé 10500 en 25 ans.

Partie B :

1. $v_0 = 300$ et $v_1 = 300 \times 1{,}02 = 306$
2. $v_{n+1} = 1{,}02 \times v_n$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$.
3. La suite est géométrique avec $v_0 = 300$ et $q = 1{,}02$: $v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 1{,}02^n$.

4. $2030-2019=11$. $v_{11}=300\times 1{,}02^{11}\approx 373{,}012$. Le prix de la mutuelle en 2030 sera de 373,01 euros.

5. Calcul de somme :

   $S_24 = v_0+v_1+\ldots+v_{24} = 300\dfrac{1-1{,}02^{25}}{1-1{,}02}\approx 9609{,}09$.

   Sophie aura payé 9609,09 en 25 ans.

Partie C :

On peut utiliser un tableur sur la calculatrice par exemple. On obtient :

$u_{48}=780$ et $v_{48}\approx 776{,}12$ puis $u_{49}=790$ et $v_{49}\approx 791{,}64$.

Ces deux suites étant croissantes, on constate que la mutuelle de l'assureur B sera plus élevée dans 49 ans soit en 2068.

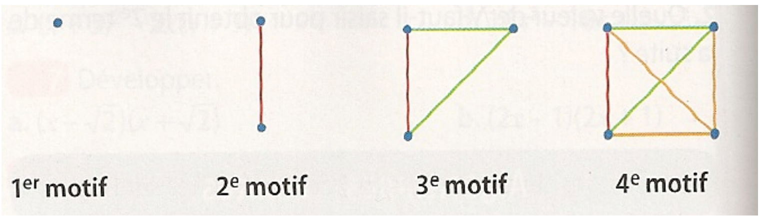
Exercice 25

On place sur un cercle n points distincts et on s'intéresse au nombre p_n de segments ayant pour extrémités deux de ces points.

1. Déterminer les valeurs de p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. Déterminer en justifiant une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
3. En déduire p_n en fonction de n.

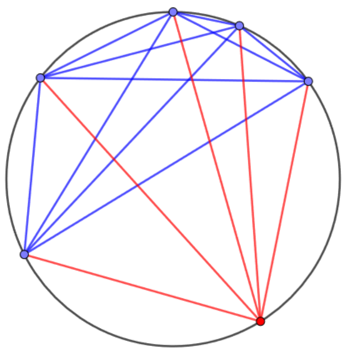
Corrigé

On retrouve un peu la situation n°3 de l'étude 1.



1) $p_2=1$; $p_3=3$; $p_4=6$; $p_5=6+4=10$;

2) Lorsque l'on ajoute un point, on a tous les segments qui existaient avant sans ce nouveau point (en bleu) et on ajoute tous les segments qui relient ce nouveau point avec les anciens (en rouge) :



Si l'on note p_n le nombre de segments avec n points ($n\geq 2$), alors pour calculer p_{n+1} (nombre de segments avec $n+1$ points) on ajoute n (nombre de segments entre le nouveau point et les précédents) à p_n (tous les segments déjà existants avec les n anciens points). Clea donne une relation de récurrence :

$p_{n+1} = p_n + n$.

On peut le vérifier avec $p_2 = 1$; $p_3 = 3$; $p_4 = 6$; $p_5 = 6+4 = 10$;

3) Cette question est difficile.

L'idée est d'écrire p_n en fonction de p_2 par montées successives et espérer constater une logique :

$p_2 = 2$

$p_3 = p_2 + 2$

$p_4 = p_3 + 3 = (p_2+2)+3$ (On remplace p_3 par p_2+2)

$p_5 = p_4 + 4 = (p_2+2+3)+4$ (On remplace p_4 par p_2+2+3)

Voyez-vous la logique ? Encore une étape...

$p_6 = p_5 + 5 = \ldots = p_2 + 2 + 3 + 4 + 5$

Ainsi,

$p_n = p_2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n - 1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n - 1$

C'est la somme des $n-1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique vue dans le cours !

Attention au décalage, ici on s'arrête à $n-1$.

$p_n = \dfrac{(n-1)(n)}{2}$ (Vous pouvez vérifier avec $p_2 = 1$; $p_3 = 3$; $p_4 = 6$; $p_5 = 6+4 = 10$).

Exercice 26

La tour de Hanoï est un jeu de réflexion imaginé par la mathématicien Edouard Lucas. Sur le plateau de jeu, il y a 3 piquets. Des disques sont empilés par ordre de taille décroissante sur le premier piquet (le plus grand disque en-dessous). L'objectif est de déplacer la pile de disques sur le dernier piquet, et cela en ne déplaçant qu'un seul disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un disque plus petit que lui.

Le déplacement d'un disque compte comme un coup.

1. Déterminer le nombre minimal de cous à effectuer pour déplacer une pile de deux disques.
2. Déterminer le nombre minimal de cous à effectuer pour déplacer une pile de trois disques.
3. On note u_n le nombre minimal de coups pour déplacer une pile de n disques. Donner la valeur de u_1, u_2 et u_3.
4. Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
5. Á l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de coups pour déplacer une pile de 15 disques.

Corrigé

1. Avec deux disques :

   Appelons A, B et C les trois piquets de gauche à droite. On part donc de A.

   $u_2 = 3$: Le petit disque sur B puis le grand disque sur C et enfin le petit disque sur C.
2. $u_3 = 7$: On place d'abord les deux premiers disques dans le bon ordre sur B en 3 étapes (comme dans le cas précédent en inversant B et C). Ensuite, on place le dernier disque sur C puis on déplace les deux petits disques sur C en utilisant cette fois le piquet A qui est libre (3 étapes).

3. $u_1 = 1$

4. Si l'on a $n+1$ disques, on voit qu'il faut déplacer les n premiers disques sur B en utilisant C qui est libre (Donc u_n coups). Ensuite, on place le dernier disque sur C puis on déplace les n petits disques sur C en utilisant cette fois le piquet A qui est libre (u_n coups).

   Ainsi, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Ce n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

5. Avec un tableur on trouve $u_{15} = 32767$. Donc 32767 coups.

   Avec Python :

```python
u = 1 #Initialisation
for i in range(14): #14 etapes de u1 a u15
    u = 2*u + 1
print(u)
```

```
32767
```

Exercice 27

Dans un célèbre jeu vidéo, des personnages s'affrontent en équipe.

Des points d'expérience sont distribués au fur et à mesure de la partie permettant à chaque personnage de gagner des niveaux de compétences.

Tous les joueurs commencent niveau 1.

Chaque personnage possède un certain nombre de points de vie qui augmente de 4% à chaque niveau.

1. Lili, un soutien indispensable dans une équipe, commence la partie avec 1534 points de vie.

   Quel sera son nombre de points de vie au niveau 10 ?

2. Chen, personnage robuste, atteint le niveau 10 avec 3661 points de vie.

   Quel était son nombre de points de vie au début de la partie ?

3. Au début de la partie, Lili a le choix entre :

   - Augmenter ses points de vie de 2% à chaque niveau supplémentaire ;
   - Gagner 55 points de vie au début de chaque niveau ;

   Que doit choisir un joueur pour rendre Lili plus résistante ?

Corrigé

1. Notons u_n le nombre de points de vie de Lili au niveau n ($n \geq 1$) :

   $u_1 = 1534$. Pour calculer u_2, il faut augmenter u_1 de 4% ce qui revient à multiplier par 1,04 :

   $u_2 = u_1 \times 1{,}04$. De même, pour calculer u_{n+1}, il faut augmenter u_n de 4% ce qui revient à multiplier par 1,04. On a donc une suite géométrique :

   $u_{n+1} = u_n \times 1{,}04$ et une forme explicite :

   $u_n = u_1 \times (1{,}04)^{n-1}$ (Attention, le premier terme est u_1 !)

   $u_{10} = u_1 \times (1{,}04)^9 \approx 2183{,}36$ Soit 2183 points de vie au niveau 10.

2. Notons v_n le nombre de points de vie de Chen au niveau n ($n \geq 1$) :

De même, on a une suite géométrique :

$v_{n+1} = v_n \times 1{,}04$ et une forme explicite :

$v_n = v_1 \times (1{,}04)^{n-1}$ (Attention, le premier terme est v_1 !)

$v_{10} = v_1 \times (1{,}04)^9 = 3661.$ C'est une équation d'inconnue v_1 :

$v_1 = \dfrac{3661}{(1{,}04)^9} \approx 2572$. Chen avait 2572 point de vie au début de la partie.

3. Notons A_n le nombre de points de vie de Lili au niveau n ($n \geq 1$) avec la première option :

$A_{n+1} = 1{,}04 * A_n * 1{,}02$ (Augmentation de 4% puis de 2% à chaque niveau) :

$A_{n+1} = 1{,}0608 * A_n$ (On voit qu'une augmentation de 4% puis de 2% ne donne pas une augmentation de 6%)

C'est une suite géométrique.

Notons B_n le nombre de points de vie de Lili au niveau n ($n \geq 1$) avec la deuxième option :

$B_{n+1} = 1{,}04 * B_n + 55$ (Augmentation de 4% puis ajout de 55 points à chaque niveau) :

Cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique. Un tableur pour calculer des valeurs :

	A	B	C
1		A	B
2	Niveau 1	1534	1534
3	Niveau 2	1627,2672	1650,36
4	Niveau 3	1726,20505	1771,3744
5	Niveau 4	1831,15831	1897,22938
6	Niveau 5	1942,49274	2028,11855
7	Niveau 6	2060,5963	2164,24329
8	Niveau 7	2185,88055	2305,81302
9	Niveau 8	2318,78209	2453,04555
10	Niveau 9	2459,76404	2606,16737
11	Niveau 10	2609,31769	2765,41406
12	Niveau 11	2767,96421	2931,03062
13	Niveau 12	2936,25643	3103,27185
14	Niveau 13	3114,78082	3282,40272
15	Niveau 14	3304,1595	3468,69883
16	Niveau 15	3505,0524	3662,44679
17	Niveau 16	3718,15958	3863,94466
18	Niveau 17	3944,22368	4073,50244
19	Niveau 18	4184,03248	4291,44254
20	Niveau 19	4438,42166	4518,10024
21	Niveau 20	4708,2777	4753,82425
22	Niveau 21	4994,54098	4998,97722
23	Niveau 22	5298,20907	5253,93631
24	Niveau 23	5620,34018	5519,09376

Les joueurs diront que la première option est plus « late game » et que la deuxième est plus « early game ». En fait, si l'on pense que la partie va durer longtemps, il vaut mieux prendre la première option.