Série 1

Exercice 1

Dans les cas ci-dessous, exprimer les 4 premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = (u_n+1)^2$.
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.
- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.
- $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$.
- $n \geqslant 0$ et $u_n = 2\,n + 5$.
- $n \geqslant 1$ et $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$.
- $n \geqslant 1$ et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 2

Pour les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ suivantes, exprimer en fonction de n les termes u_{n+1}, u_n+1, $u_{2\,n}$, $u_{2\,n+1}$, u_{n-1} :

- $u_n = 3\,n^2 - 1$.
- $u_n = \dfrac{2\,n-1}{n+2}$.

Exercice 3 Une curiosité venant de Syracuse

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie de la manière suivante :

• u_0 est un entier strictement positif donné ; • pour tout entier n, on pose : $\begin{cases} u_{n+1} = 3\,u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair.} \end{cases}$

1. On choisit $u_0 = 1$.

   Déterminer u_1, u_2, ... jusqu'à ce qu'on puisse remarquer quelque chose.
2. Même question avec avec $u_0 = 4$, puis $u_0 = 5$.
3. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Exercice 4

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? a) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$ b) $v_n = n^2$ c) $w_n = 5^{2n}$

Exercice 5

Soit une suite (u_n), géométrique, de raison q. Pour chaque cas, retrouver ce qui est cherché.

1. $u_0 = 16$ et $q = \dfrac{1}{2}$, calculer u_8
2. $u_6 = 2$ et $q = \dfrac{1}{4}$, calculer u_0
3. $u_8 = -4$, $u_{10} = -36$ et $q > 0$, calculer q
4. $u_7 = 54$ et $u_{12} = 13\,122$, calculer u_2

Exercice 6

Soit u la suite telle que $u_0 = -4$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n$.

1. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
2. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -262\,144$.

Exercice 7

Les suites définies ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

1. $u_n = \dfrac{3\,n+1}{2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. $v_n = n^2 - n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Série 2

Exercice 8

Soit une suite (u_n) arithmétiques, de raison r. Pour chaque cas déterminer ce qui est demandé.

1. $u_0 = 4$ et $r = 2$. Déterminer u_{35}
2. $u_1 = 3$ et $r = -2$. Déterminer u_{17}
3. $u_2 = 3$ et $u_{14} = 9$. Déterminer la raison r
4. $u_4 = 1$ et $u_9 = 4$. Déterminer u_{21}

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique telle que $u_4 = 9$ et $u_1 + u_2 + \dots + u_8 = 92$.

1. Déterminer la raison r de la suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite arithmétique de raison 0,5 telle que $u_1 = -1$.

1. Calculer u_{100}.
2. Déterminer à partir de quel rang N on a $u_N \geqslant 50$.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -2n^2 + 1$, pour $n \geqslant 0$.

1. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.
2. Comment semblent se comporter les termes de la suite (u_n) ?
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
4. Pour n très très grand, que peut-on dire de u_n ?

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer u_1, u_2 u_3 et u_4.
2. Déterminer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. En déduire les variations de (u_n).

   Qu'aurait pu-t-on également faire pour déterminer les variations de cette suite ?
4. Pour n très très grand, que peut-on dire de u_n ?

Série 3

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. En calculant les premiers termes de la suite (u_n), que peut-on dire de la nature de la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$.

   Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. A l'aide de la calculatrice, estimer vers quelle valeur va tendre cette suite pour des valeurs de n très grandes.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2\,u_n + 1}$, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$. On admet donc que $u_n \neq 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

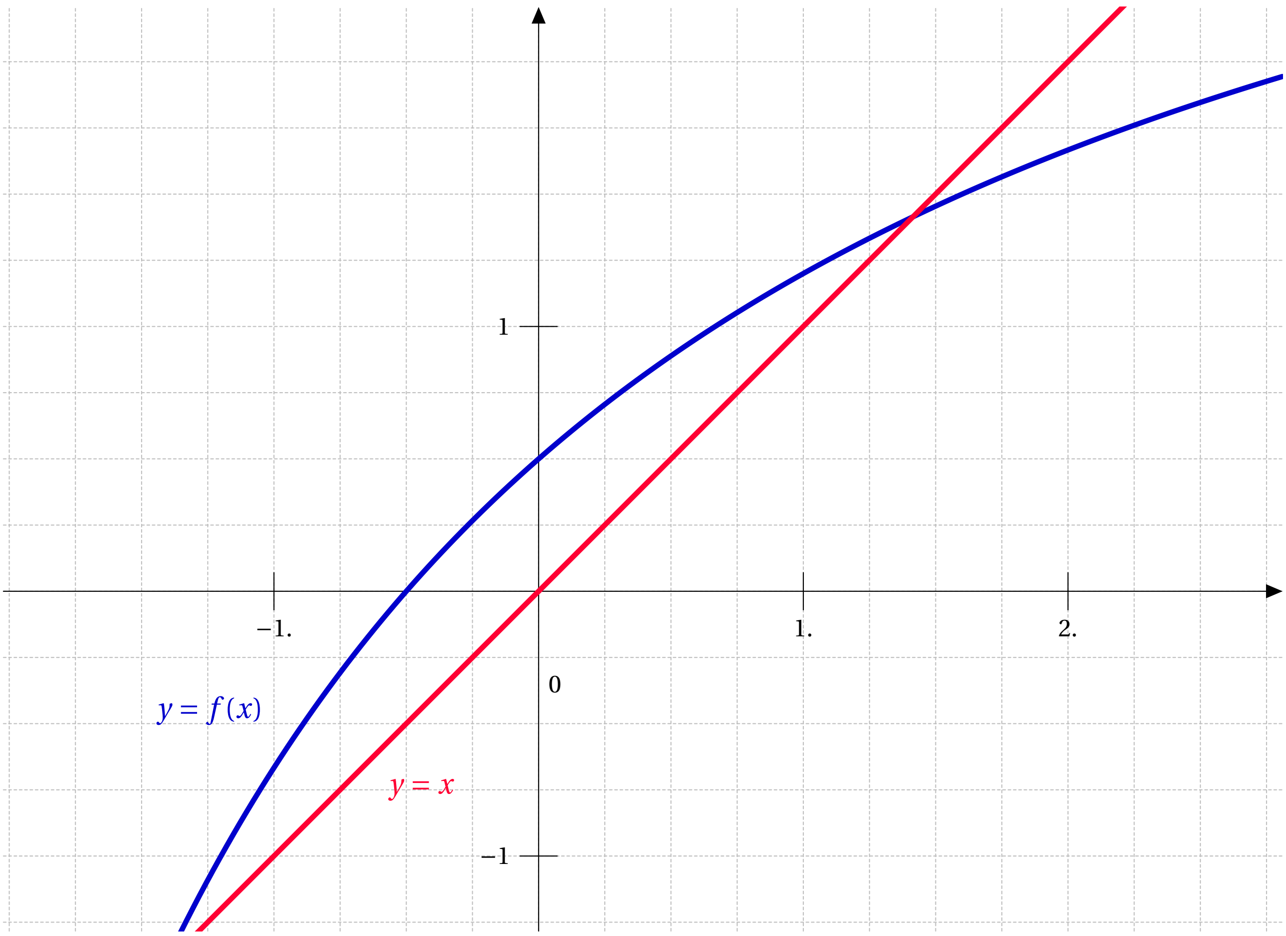
1. Montrer que (v_n) est arithmétique.
2. Déterminer alors l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire celle de u_n en fonction de n.

Exercice 15

On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Soit v_n la suite définie par $v_0 = -0{,}25$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

Construire graphiquement la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n) sur l'axe des abscisses.

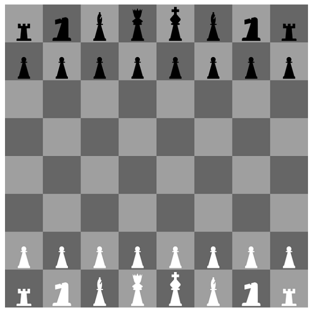


Série 4

Exercice 16

1. Calculer $S_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^{20}$.
2. Calculer $S_2 = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$.
3. Calculer $S_3 = 7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + 7 \times 2^{10}$.
4. Calculer $S_4 = 2 + (2+2) + (4+2) + (6+2) + (8+2) + (10+2) + \ldots + (16+2)$.
5. Calculer $S_5 = 3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 103$.

Exercice 17

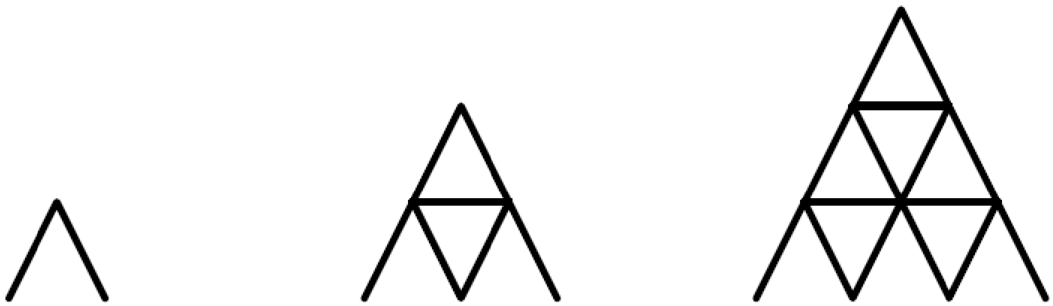


On raconte que l'inventeur de l'échiquier demanda, comme humble récompense, un grain de blé sur la première case, deux grains de blé sur la deuxième case, 4 grains de blé sur la troisième case, 8 grains sur la quatrième et ainsi de suite en doublant à chaque case le nombre de grains de blé, jusqu'à la 64ème case.

1. Donner le nombre de grains de blé correspondant à la $n^{\text{ème}}$ case.
2. Calculer le nombre total de grains à donner à l'inventeur.
3. Un grain de blé pèse 0,05 g. La production mondiale de blé en 1995 était de 600 millions de tonnes.
   Cette production suffirait-elle à payer l'inventeur?

Exercice 18

On souhaite savoir combien de cartes sont nécessaires pour construire un château de cartes de n étages avec $n \in \mathbb{N}$. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite qui donne le nombre de cartes nécessaires pour construire la base dans un château de n étages.



Premier étage $u_1 = 2$ — Deux étages et $u_2 = 5$ — 3 étages

1. Déterminer une relation de récurrence qui lie u_{n+1} et u_n ; en déduire la nature de (u_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Calculer le nombre de cartes nécessaires pour construire un château de 8 étages.
3. J'ai dix jeux de 32 cartes. Combien d'étages entiers mon château va-t-il avoir?

Exercice 19

Pour recouvrir un toit en forme de cône, un couvreur dispose les ardoises en rangs successifs en partant du bas.

La pointe du toit est recouverte de zinc.

Sur le premier rang il y a 213 ardoises, 207 sur le deuxième rang, 201 sur le troisième rang, 195 sur le quatrième rang ... et ainsi de suite en suivant la même progression.

On pose, u_n le nombre d'ardoises sur le $(n+1)^{\text{ième}}$ rang.

1. Quelles sont les valeurs de u_0 et de u_1 ?
2. Après avoir précisé la nature de la suite (u_n), exprimer u_n en fonction de n.
3. Sachant que le dernier rang comporte 9 ardoises, montrer que le nombre total de rangs à mettre en place pour couvrir le toit est de 35.
4. Calculer le nombre total d'ardoises nécessaires pour couvrir le toit.
5. Malheureusement, on ne dispose que d'un stock de 2 000 ardoises de ce type.
   Combien de rangs entiers cela aura-t-il permis de couvrir ?

Exercice 20

Sophie veut comparer les prix de deux mutuelles entre un assureur A et un assureur B.

Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 € par an en 2019.

Partie A : L'assureur A prévoit une augmentation de 10 euros par an.

On note u_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur A en $2019+n$.

1. Déterminer la valeur de u_0 et u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de cette suite ?
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Quel sera le prix de la mutuelle en 2030 ?
5. Combien Sophie aura-t-elle payé en 25 ans si elle choisit l'assureur A ?

Partie B : L'assureur B prévoit une augmentation de 2 % par an.

On note v_n le prix annuel de la mutuelle de l'assureur B en $2019+n$.

1. Déterminer la valeur de v_0 et v_1.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de cette suite ?
3. En déduire l'expression de v_n e fonction de n.
4. Quel sera le prix de la mutuelle en 2030 ?
5. Combien Sophie aura-t-elle payé en 25 ans si elle choisit l'assureur B ?

Partie C : En utilisant la calculatrice, déterminer en quelle année le prix de la mutuelle de l'assureur B devient pour la première fois plus élevé que le prix de la mutuelle de l'assureur A.

Non utilisés

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2. Que peut-on dire de la nature de la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Ces valeurs sont-elles compatibles avec une suite géométrique ?
   b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis de n. Combien vaut u_{10} ?
4. A l'aide de la calculatrice, estimer vers quelle valeur va tendre cette suite pour des valeurs de n très grandes.

Exercice 22

Le contrat de location d'un bien immobilier fixe le loyer mensuel à 500 € la première année, réévalué de 2 % chaque année à la date anniversaire du contrat.

On note l_n le montant en euro du loyer mensuel la n-ième année après la signature du contrat (n nombre entier naturel).

Ainsi, $l_0 = 500$.

1. Calculer l_1 et l_2.
2. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n.
3. Calculer le montant total des loyers durant neuf années de location. Arrondir au centième.
4. Avec la calculatrice, déterminer à partir de quelle année le loyer mensuel dépassera 1 000 €.

Exercice 23

Sur une grille à mailles carrées d'un centimètre de côté, on place une boule de neige de dix centimètres de diamètre, bien centrée.

Elle fond et son volume est divisé par huit à chaque heure écoulée.

On fait une observation toutes les heures. Dans combien de temps constaterons-nous que ce qui reste de la boule n'est plus retenu par la grille ?

Exercice 24

Pour rechercher la présence d'eau, on entreprend un forage.

Creuser le premier mètre coûte 90 euros, le second 110 euros, le troisième 130 euros et ainsi de suite en augmentant toujours de 20 euros le prix du mètre supplémentaire.

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, où u_n désigne le coût pour creuser le $n^{\text{ème}}$ mètre.

Par exemple, on a $u_3 = 130$.

1. Donner la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n.
2. Quel sera le prix pour creuser le 46$^{\text{ème}}$ mètre ?
3. À partir de quelle profondeur le prix du mètre à creuser sera-t-il supérieur à 510 euros ?
4. On dispose d'une somme de 21 000 euros. Quelle profondeur peut-on atteindre ?

Exercice 25

On place sur un cercle n points distincts et on s'intéresse au nombre p_n de segments ayant pour extrémités deux de ces points.

1. Déterminer les valeurs de p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. Déterminer en justifiant une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
3. En déduire p_n en fonction de n.

Exercice 26

La tour de Hanoï est un jeu de réflexion imaginé par la mathématicien Edouard Lucas. Sur le plateau de jeu, il y a 3 piquets. Des disques sont empilés par ordre de taille décroissante sur le premier piquet (le plus grand disque en-dessous). L'objectif est de déplacer la pile de disques sur le dernier piquet, et cela en ne déplaçant qu'un seul disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un disque plus petit que lui.

Le déplacement d'un disque compte comme un coup.

1. Déterminer le nombre minimal de cous à effectuer pour déplacer une pile de deux disques.
2. Déterminer le nombre minimal de cous à effectuer pour déplacer une pile de trois disques.
3. On note u_n le nombre minimal de coups pour déplacer une pile de n disques. Donner la valeur de u_1, u_2 et u_3.
4. Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
5. Á l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de coups pour déplacer une pile de 15 disques.

Exercice 27

Dans un célèbre jeu vidéo, des personnages s'affrontent en équipe.
Des points d'expérience sont distribués au fur et à mesure de la partie permettant à chaque personnage de gagner des niveaux de compétences.

Tous les joueurs commencent niveau 1.

Chaque personnage possède un certain nombre de points de vie qui augmente de 4% à chaque niveau.

1. Lili, un soutien indispensable dans une équipe, commence la partie avec 1534 points de vie.

   Quel sera son nombre de points de vie au niveau 10 ?

2. Chen, personnage robuste, atteint le niveau 10 avec 3661 points de vie.

   Quel était son nombre de points de vie au début de la partie ?

3. Au début de la partie, Lili a le choix entre :

   - Augmenter ses points de vie de 2% à chaque niveau supplémentaire ;
   - Gagner 55 points de vie au début de chaque niveau ;

   Que doit choisir un joueur pour rendre Lili plus résistante ?