Cours : Les suites

Pour prévoir l'évolution d'un phénomène, ou juste pour jouer, on utilise des suites de nombres.

I. Les suites - Cas général

1. Définition d'une suite

Approche intuitive : Si on écrit une suite ordonnée de nombres comme $1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \ldots$, ou $100 \quad 10 \quad 1 \ldots$ on a un 1^{er} terme, 2^{eme} terme, … on peut donc les numéroter avec des nombres entiers.

Définition :

Une suite numérique (u_n) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,qui à chaque nombre entier $n \in \mathbb{N}$, associe un nombre réel noté $u(n)$ ou plus simplement u_n. $\quad n \longmapsto u(n) = u_n$

Remarques :

- n est appelé indice du terme général u_n. Lorsqu'on l'écrit, il faut bien distinguer u_n de un!
- Attention, le terme u_n d'indice n, n'est pas le n^{eme} terme de la suite (le premier terme est u_0, d'indice 0!)
- Ne pas confondre le terme u_n, qui est un nombre et (u_n) qui est une suite.

2. Mode de génération d'une suite

• Formule explicite :

Lorsque pour tout n de $\mathbb{N}$, (u_n) est exprimée en fonction de n et indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie de manière explicite. **Exemple :** $u_n = 3n^2 - 5n + 4$

• Formule de récurrence :

Lorsque la suite est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation exprimant u_{n+1} en fonction du terme u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que la suite est définie par récurrence. **Exemple :** $u_{n+1} = 3u_n^2 - 5u_n + 4$

Remarque : Certaines suites sont définies avec une double récurrence comme la suite de Fibonacci définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$

II. Les suites arithmétiques

1. Définition et propriétés

Définition 1 : (*formule récurrente*)

Soit r un nombre réel .
On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r. Autrement dit : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} v_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & v_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & v_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & v_3 & \cdots & v_n \arrow[r, bend left, "+r"] & v_{n+1} \end{tikzcd}$$

Théorème 1 : (*formule explicite*)

Soit $(\boldsymbol{u_n})$ une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$ et de premier terme $\boldsymbol{u_0}$. Alors $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \cdots & u_n \end{tikzcd}$$

Remarque : Si le premier terme est u_1 alors $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1) \times r}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exemple : Soit $(\boldsymbol{u_n})$ une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r = 1{,}5}$ et de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 3}$. Alors $u_n =$

Méthode 1 : *(Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?)*

Il suffit de calculer et de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (indépendante de n).
Cette constante sera la raison de la suite arithmétique.
Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = -5n + 4$ est-elle arithmétique ?

$u_{n+1} - u_n =$ ....

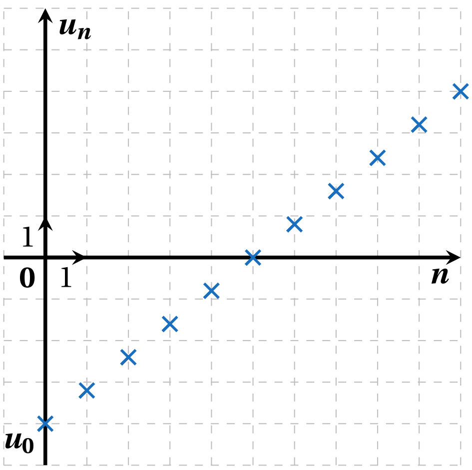
2. Représentation graphique d'une suite arithmétique

Dans le plan muni d'un repère, on représente la suite par l'ensemble des points $M(n\,;\,u_n)$.
Dans le cas d'une suite arithmétique de raison r, **les points sont alignés** sur une droite de coefficient directeur r

Exemples :

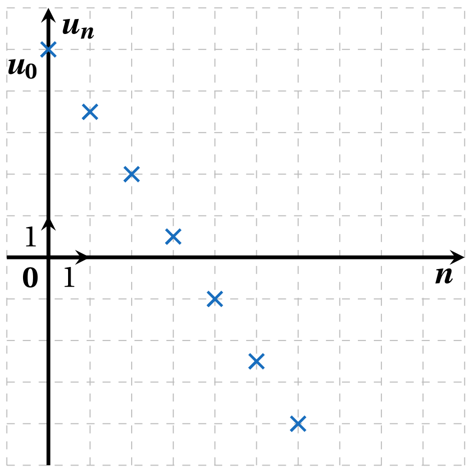
- (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 0{,}8$ et de premier terme $u_0 = -4$.

n	u_n
0	−4
1	−3,2
2	−2,4
3	−1,6
4	−0,8
5	0
6	0,8
7	1,6
8	2,4
...	...



- (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = -1{,}5$ et de premier terme $u_0 = 5$.

n	u_n
0	5
1	3,5
2	2
3	0,5
4	−1
5	−2,5
6	−4
7	−5,5
8	−7
...	...



III. Les suites géométriques

1. Définition et propriétés

Définition 2 :(*formule récurrente*)

Soit q un nombre réel.
On dit qu'une suite (v_n) est une suite géométrique de raison q lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q. Autrement dit : $\boldsymbol{v_{n+1} = q \times v_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_3 & \cdots & v_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_{n+1} \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : *(formule explicite)*

Soit $(\boldsymbol{v_n})$ une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ et de premier terme $\boldsymbol{v_0}$. Alors $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_3 \quad \cdots & v_n
\end{tikzcd}$$

Remarque : Si le premier terme est v_1 alors $\boldsymbol{v_n = v_1 \times q^{n-1}}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exemple : Soit $(\boldsymbol{v_n})$ une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q = 1{,}5}$ et de premier terme $\boldsymbol{v_0 = 3}$. Alors $v_n =$

Méthode 2 : *(Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?)*

Il suffit de calculer et de montrer que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (indépendante de n).
Cette constante sera la raison de la suite géométrique. (Sinon elle n'est pas géométrique)

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 + 4$ est-elle géométrique ?

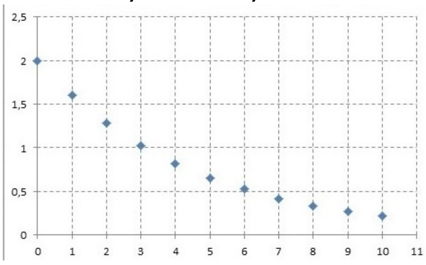
....

2. Représentation graphique d'une suite géométrique

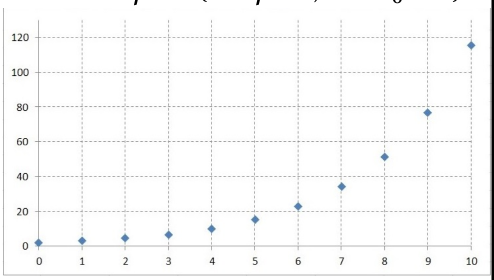
Dans le plan muni d'un repère, on représente la suite par l'ensemble des points $M(n\,;\,v_n)$.
Dans le cas d'une suite géométrique de raison $q \neq 0$, **les points ne sont pas alignés**.

Exemples :

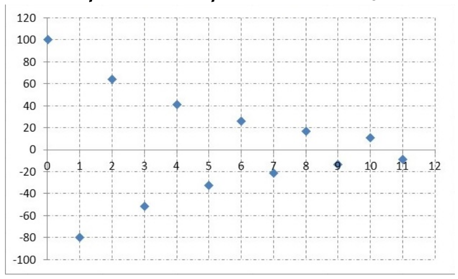
Raison $0 < q < 1$ (ici $q = 0{,}8$ et $v_0 = 2$)



Raison $q > 1$ (ici $q = 1{,}5$ et $v_0 = 2$)



Raison $q < 0$ (ici $q = -0{,}8$ et $v_0 = 100$)



IV. Variation d'une suite

Définition 3 :

- Une suite (u_n) est dite croissante lorsque pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- Une suite (u_n) est dite décroissante lorsque pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$
- La suite (u_n) est dite constante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Théorème 3 : Cas suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- La suite (u_n) est croissante ssi $r > 0$.
- La suite (u_n) est décroissante ssi $r < 0$.
- La suite (u_n) est constante ssi $r = 0$

Théorème 4 : Cas suite géométrique de raison $q > 0$

Soit (v_n) une suite géométrique de 1^{er} terme $v_0 > 0$.

- La suite (v_n) est croissante ssi $q > 1$.
- La suite (v_n) est constante ssi $q = 1$.
- La suite (v_n) est décroissante ssi $0 < q < 1$.

⚠ Si $v_0 < 0$, c'est le contraire.

Méthode 3 : Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut :

- Calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe.
- Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs
- Utiliser la nature de la suite (cas arithmétiques et géométriques, voir théorèmes 3 et 4)

V. Somme des termes d'une suite

1. Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 5 : (*Gauss*)

On note $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{i=1}^{n} i$, la somme des n premiers entiers. Alors $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Théorème 6 :(*Somme arithmétique*)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On note $S_n = u_1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.la somme des n premiers termes. Alors $\boxed{S_n = \dfrac{n \times (u_1 + u_n)}{2}}$.

Exemple

Calculer la somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 4.

....

2. Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 7 :(*Somme des puissances*)

Soit $q \in \mathbb{R}$. On note $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i$

- Si $q = 1$, alors $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + 1 + \cdots + 1 = n+1$.
- Si $q \neq 1$, alors $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ ou encore $\boxed{\dfrac{q^{n+1} - 1}{q-1}}$

Théorème 8 :(*Somme géométrique*)

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

On note $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = \sum_{i=0}^{n} v_0 q^i$

- Si $q = 1$, alors $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = (n+1)v_0$.
- Si $q \neq 1$, alors $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = v_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ ou encore $\boxed{1^{er}\text{terme} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}}$

Exemples

Calculer la somme $S_n = 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n$

....

Calculer la somme $S_n = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots + 9 \times 0{,}1^n$

....