Cours : Probabilités

I. Rappels

1. Vocabulaire, Notations

Définition :

Une **épreuve aléatoire** est une expérience reproductible dont le résultat dépend du hasard, c'est-à-dire dans laquelle différentes issues peuvent se produire, sans qu'on puisse prévoir laquelle.

Définitions :

- **L'univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble des **issues** possibles. On le note Ω.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers. Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

Définitions :

Soient A et B deux événements.

- L'**union** de A et de B, notée $A \cup B$ («A union B») est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B.
- L'**intersection** de A et de B, notée $A \cap B$ («A inter B») est l'ensemble des issues qui réalisent A **et** B.
- A et B sont dits **incompatibles** lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun. Autrement dit lorsque $A \cap B = \emptyset$.
- Le **contraire** de A, noté $\overline{A}$ («A barre») est l'ensemble des issues qui **ne réalisent pas** A.

Définition :

Une épreuve ayant k issues notées $\omega_1, \omega_2, ...\omega_k$ est modélisée par une urne contenant N boules dont n_1 boules marquées ω_1, n_2 boules marquées ω_2, ..., n_k boules marquées ω_k avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = N$
La **probabilité** de chaque issue est alors le rapport $p_i = \dfrac{n_i}{N}$.
p_i est un nombre compris entre 0 et 1.

Définition :

Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé se note $P_A(B)$ et $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
On lit : « **probabilité de B sachant A** ».

Remarque :

On définit de la même manière $P_B(A)$ lorsque $P(B) \neq 0$ par $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Théorème 1 : *Formule de Bayes*

Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire avec $P(A)$ et $P(B)$ non nuls.
On a : $\quad P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$

Théorème 2 : *Formule des probabilités totales*

Soient $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, une partition de l'univers Ω, alors pour tout évènement B :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$

Définition :

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire.

Dire que A et B sont **indépendants** signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Autrement dit, la réalisation de A n'influence pas celle de B : $P_A(B) = P(B)$.

2. Fréquences et probabilités

Proposition : *Loi des grands nombres*

Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, alors la fréquence d'un événement a tendance à se stabiliser autour de sa probabilité

Exemple :

Le tableau ci-dessous donne les fréquences observées sur 1 000 parties à la roulette (jeu simple).
Les issues de cette expérience aléatoire sont {zéro ; rouge ; noir} :

Couleur	0	Rouge	Noir
Fréquences observées	$\frac{35}{1\,000} = 3{,}5\%$	$\frac{476}{1\,000} = 47{,}6\%$	$\frac{489}{1\,000} = 48{,}9\%$
Probabilité théorique	$\frac{1}{37} \approx 2{,}7\%$	$\frac{18}{37} \approx 48{,}65\%$	$\frac{18}{37} \approx 48{,}65\%$

II. Variables aléatoires réelles

1. Définition

Définition :

L'univers Ω est l'ensemble des issues ω_i d'une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire X sur Ω , c'est associer un nombre réel x_i à chaque issue ω_i. $X : \{\omega_1 ; \omega_2 ; ....; \omega_n\} \to \{x_1 ; x_2 ; ......; x_n\}$

Exemple :

Avec notre roulette. Cette fois-ci, nous regardons le numéro sur lequel va s'arrêter la bille : $\Omega = \{0; 1; 2; 3......; 35; 36\}$.

En misant sur un numéro, si la bille tombe sur le numéro choisi, vous gagnez 35 fois votre mise et vous récupérez votre mise sinon, vous perdez votre mise.

Une personne mise 1€, sur le numéro 23. Soit X la variable aléatoire définie par le gain net de cette personne. À chaque issue, on associe son gain :

ω_i	0	1	2	...	22	23	24	...	35	36
$X(\omega_i)$	-1€	-1€	-1€	-1€	-1€	35€	-1€	-1€	-1€	-1€

À chaque issue ω_i (sauf 23) on associe le nombre -1. À l'issue 23, on associe le nombre 35. X est donc comme une «fonction» qui peut prendre aléatoirement les valeurs $\{-1; 35\}$

2. Loi de probabilité

Définition :

Soit X une variable aléatoire sur Ω , pouvant prendre comme valeurs les nombres $\{x_1; x_2; ......; x_n\}$. Définir la loi de probabilité de X, c'est donner la probabilité p_i de chaque événement $(X = x_i)$.

En général on le fait sous forme d'un tableau :

Valeur de X : x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarques :

- La somme des p_i est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des éventualités qui le composent.
- La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x_2 se note donc $P(X = x_2)$. D'après le tableau précédent, $P(X = x_2) = p_2$.

Exemples : Avec notre roulette :

Pour une mise de 1€, sur un numéro :

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs -1 et 35.

Sa loi de probabilité est donnée dans le tableau :

Valeur de X : x_i	-1€	35€
$P(X = x_i)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

Pour une mise de 1€, sur trois numéros :

X peut prendre les valeurs -1 et 11.

La loi de X est donnée dans le tableau :

Valeur de X : x_i	-1€	11€
$P(X = x_i)$	$\frac{34}{37}$	$\frac{3}{37}$

III. Paramètres

1. Espérance

Définition :

Soit X une variable aléatoire de loi P :

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'**espérance** de cette variable aléatoire X est le nombre noté $E(X)$ tel que $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$

Remarque :

L'espérance est une moyenne pondérée : C'est la valeur moyenne pris par la variable aléatoire (en tenant compte des p_i). D'après la loi des grands nombres, ce nombre théorique doit être « proche » de la moyenne des valeurs observées.

Exemples : Avec notre roulette :

Pour une mise de 1€, sur un numéro :

$E(X) =$-1€$\times\frac{36}{37} + 35$€$\times\frac{1}{37} = \frac{-1}{37}$

Pour une mise de 1€, sur trois numéros :

$E(X) =$-1€$\times\frac{34}{37} + 11$€$\times\frac{3}{37} = \frac{-1}{37}$

Remarque :

Dans les deux cas, on perd en moyenne 1/37 ème de sa mise, (environ 2,7%). Si on joue mille parties, on peut s'attendre à une perte de 27 euros (environ).

2. Variance et écart type

S'il est vrai que la valeur de $E(X)$ renseigne sur l'ordre de grandeur de la valeur qu'on peut « attendre », elle ne dit rien de la fluctuation possible autour de cette valeur centrale. Pour évaluer la dispersion des valeurs, on va calculer la moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne. On obtient ainsi la Variance $V(X)$ puis l'écart type $\sigma(X)$.

Définition :

Soit X une variable aléatoire de loi P, et d'espérance $E(X)$:

Valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

La **variance** de cette variable aléatoire X est le nombre noté V(X) tel que :

$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$

L'**écart type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : Avec notre roulette :

Pour une mise de 1€, sur un numéro :

$E(X) = \dfrac{-1}{37}$

$V(X) = \dfrac{1}{37}(35 + \dfrac{1}{37})^2 + \dfrac{36}{37}(-1 + \dfrac{1}{37})^2 \approx 34{,}08$

$\sigma(X) \approx \sqrt{34{,}08} \approx 5{,}84$

Pour une mise de 1€, sur trois numéros :

$E(X) = \dfrac{-1}{37}$

$V(X) = \dfrac{3}{37}(11 + \dfrac{1}{37})^2 + \dfrac{34}{37}(-1 + \dfrac{1}{37})^2 \approx 10{,}73$

$\sigma(X) \approx \sqrt{10{,}73} \approx 3{,}28$

Dans les deux cas, l'espérance est la même mais la dispersion est plus marquée avec un mise sur numéro plein. Cela génère plus d'adrénaline pour le joueur.... Si on joue peu de fois on risque de gagner gros ou bien de perdre gros si l'écart-type est grand. En revanche si on joue une couleur l'écart-type est faible. On prend peu de risque.

3. Linéarité

Propriété 3 :

Soit X une variable aléatoire et soient a et b deux réels. On a :

$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = a\sigma(X)$.

Exemple : Avec notre roulette :

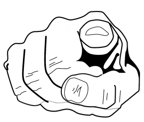
On note X la variable aléatoire définie par le gain net (mise déduite) avec une mise de 1 euro à la roulette sur le numéro 23.

On note Y la variable aléatoire définie par le gain brut (mise non incluse) avec une mise de 10 euros sur le même numéro que précédemment. On a alors :

ω_i	0	1	2	...	22	23	24	...	35	36
$X(\omega_i)$	-1€	-1€	-1€	-1€	-1€	35€	-1€	-1€	-1€	-1€
$Y(\omega_i)$	0€	0€	0€	0€	0€	360€	0€	0€	0€	0€

$Y = 10X + 10 \qquad E(X) = -1/37 \qquad V(X) = 34{,}08$ et $\sigma(X) = 5{,}84$ donc ...

Exercice :



$E(Y) = \ldots \qquad V(Y) = \ldots \qquad \sigma(Y) = \ldots$

Propriété 4 :

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω. Alors : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Si de plus X et Y sont indépendantes, on a alors : $V(X+Y)=V(x)+V(Y)$.

IV. Loi de Bernoulli

Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire à deux issues généralement appelées « Succès » et « Échec ». Dans ce cas, l'univers d'une épreuve de Bernoulli pourra se noter $\Omega = \{S ; E\}$.

Définition :

On se place dans une épreuve de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire qui associe :

- 1 pour le Succès (de probabilité p),
- 0 pour l'Échec (de probabilité $q=1-p$).

On dit alors que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(1\,;p)$.

Valeurs de X : k	1	0
$P(X=k)$	p	$1-p$

Loi de Bernoulli de paramètre p

Théorème 5 :

Soit X une variable aléatoire suivant une **loi de Bernoulli de paramètre p**. Alors :

$$E(X)=p \qquad \text{et} \qquad \sigma(X)=pq$$

Exemple :

En misant sur un numéro, une partie de roulette peut être considérée comme une **épreuve de Bernoulli** :

- Succès : La bille s'arrête sur notre numéro;
- Échec : Sinon.

On note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'on gagne et 0 si l'on perd. X va donc suivre une **loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{37}$**

Remarque :

Soit A un événement relatif à une expérience aléatoire quelconque tel que $P(A)=p$. Si on ne s'intéresse qu'à la réalisation de A, on peut considérer cette expérience comme une **épreuve de Bernoulli** dont les deux issues sont A et son contraire $\overline{A}$.

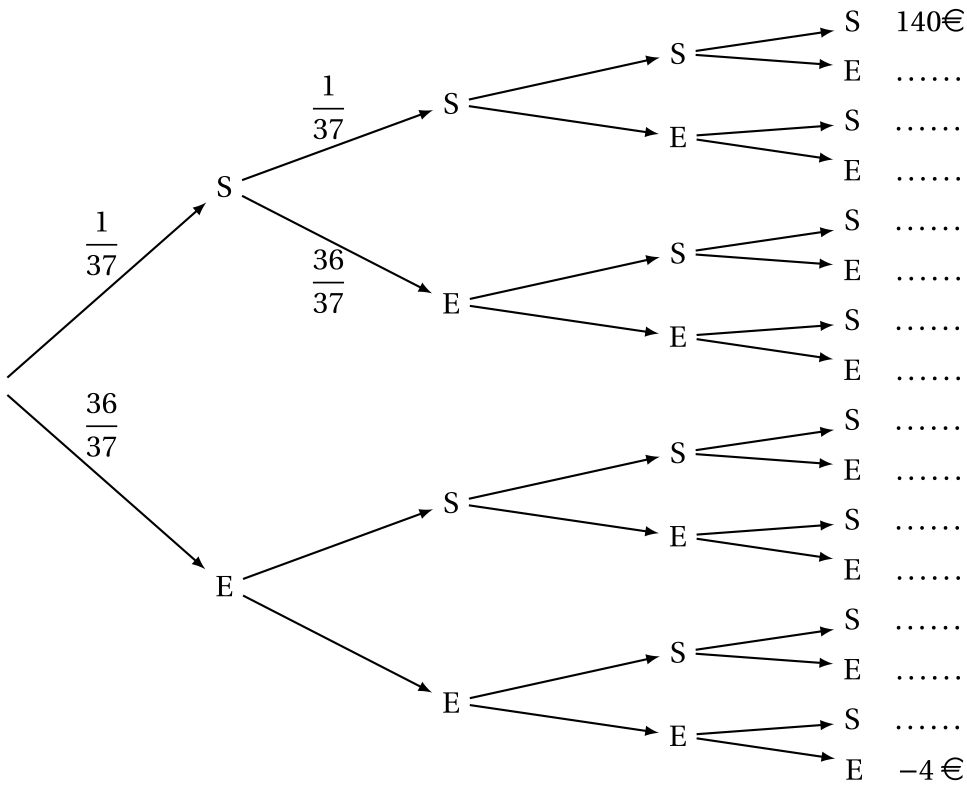
V. Loi binomiale

1. Introduction par l'exemple

Je décide de jouer 4 fois de suite à la roulette avec, à chaque fois, une mise de 1€ sur un numéro.
Pour une partie, la probabilité de gagner est : $p=\dfrac{1}{37}$.

On peut modéliser cette situation par un arbre de probabilité avec :

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ chemins possibles ;
- Sur chaque segment (branche) on note la probabilité correspondante ;
- Chaque chemin représente une issue dont **la probabilité est égale au produit des probabilités** rencontrées le long du chemin.



On peut alors calculer les probabilités pour chaque gain net possible : −4€ ; 32€ ; 68 € ; 104€ ; 140€sans oublier que plusieurs chemins peuvent mener à ce gain.

Par exemple :

- $P\left(\text{gain} = 32€\right) = 4 \times p \times (1-p)^3 \approx 9{,}96\%$ 4 chemins menant à 32€ composés d'un Succès et de 3 Échecs.
- $P\left(\text{gain} = 68€\right) = 6 \times p^2 \times (1-p)^2 \approx 0{,}41\%$ 6 chemins composés de 2 Succès et de 2 Échecs.

On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire « gain » :

Nombre de succès	0	1	2	3	4
Valeur de gain : g	−4€	32€	68€	104€	140€
$P(\text{gain} = g)$	89,62%	9,96%	0,41%	0,01%	0,00%

Quelques analyses :

- On peut gagner au moins une fois dans plus de 10% des cas.
- L'espérance est de −0,11€et la variance 136,32 (c'est 4 fois plus que lorsqu'on joue une seule fois).
- On a répété 4 **épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**.

2. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définitions :

Soit n un nombre entier naturel non nul et $p \in [0;1]$.

- Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenu lors d'un schéma de Bernoulli et p la probabilité du succès dans une des épreuves de ce schéma de Bernoulli. On dit alors que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $X \sim \mathscr{B}(n; p)$.

Remarque :

On obtient alors une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs $\{0; 1; \ldots; n\}$. Ces valeurs correspondent au nombre de succès réalisés dans le schéma de Bernoulli.

Exemple :

Jouer 4 fois de suite à la roulette en misant à chaque fois sur un seul numéro est une répétition de **4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes** (gagner ou perdre une partie n'influence pas les probabilités de gagner ou de perdre dans les autres parties).
C'est donc un **schéma de Bernoulli**. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées dans ce schéma. X suit une **loi binomiale** de paramètres 4 et $\frac{1}{37}$: $X \sim \mathscr{B}\left(4; \frac{1}{37}\right)$.

3. Coefficients binomiaux

Définition :

Pour une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, le nombre de chemins menant à une issue comportant exactement k succès, est le nombre $\binom{n}{k}$ qui se lit « k parmi n ».

Exemple : *(Voir l'arbre page 6.)*

Dans une répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes :

- Il y a 4 chemins comportant exactement 1 succès : $\binom{4}{1} = 4$;
- Il y a 6 chemins comportant exactement 2 succès : $\binom{4}{2} = 6$.

Méthodes pour calculer les coefficients binomiaux :

☞ Compter les chemins dans un arbre si cela est possible ;

☞ Utiliser la calculatrice ;

☞ Utiliser le **triangle de Pascal** : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n-1$

☞ Utiliser la formule avec Factorielle : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $0 \leq k \leq n$

4. Des formules pour la loi binomiale

Théorème 6 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors, pour $0 \leq k \leq n$ on a :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Théorème 7 :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :

$$E(X)=np \qquad V(X)=np(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

Exemple :

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées lorsque l'on joue 4 fois de suite à la roulette en misant à chaque fois sur un numéro. X suit une **loi binomiale** de paramètres 4 et $\dfrac{1}{37}$: $X \sim \mathscr{B}\left(4;\dfrac{1}{37}\right)$.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{37}\right)^0\times\left(\frac{36}{37}\right)^4$	$\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{37}\right)^1\times\left(\frac{36}{37}\right)^3$	$\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{37}\right)^2\times\left(\frac{36}{37}\right)^2$	$\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{37}\right)^3\times\left(\frac{36}{37}\right)^1$	$\binom{4}{0}\times\left(\frac{1}{37}\right)^4\times\left(\frac{36}{37}\right)^0$
soit environ…	89,62%	9,96%	0,41%	0,01%	0,00%

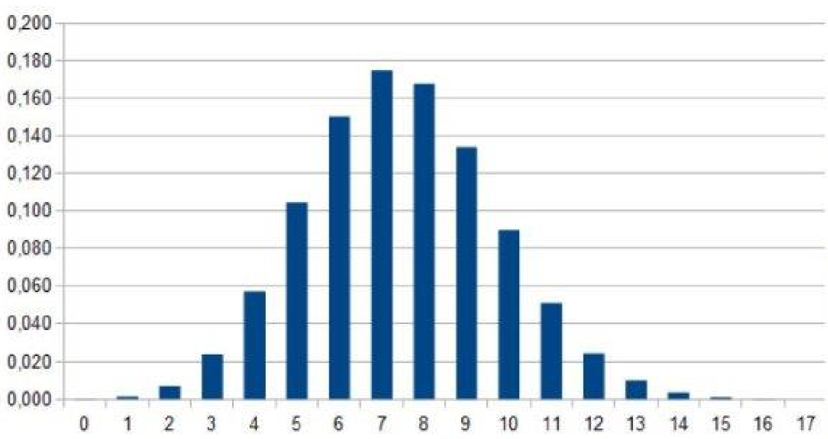
On peut aussi utiliser un graphique. (surtout lorsque n est grand).

5. Graphique

On joue 23 fois de suite à la roulette en misant sur une colonne (12 numéros).

Pour une seule partie, la probabilité de gagner est : $p=\dfrac{12}{37}\approx 32\%$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées lors de ces 23 répétions identiques et indépendantes. $X \sim \mathscr{B}\left(23;\dfrac{12}{37}\right)$



Loi $\mathscr{B}\left(23;\dfrac{12}{37}\right)$

- On peut gagner entre 0 et 23 fois ;
- On lit : $P(X=5)\approx 10\%$
- $P(X>16)\approx 0\%$
- $P(10\leq X\leq 12)\approx 9\%+5\%+2\%=16\%$
- $E(X)=23\times\dfrac{12}{37}\approx 7{,}46$.

  C'est le nombre de succès moyen.
- $V(X)=23\times\dfrac{12}{37}\times\dfrac{25}{37}\approx 5{,}04$.
- $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx 2{,}26$.

  Cet écart type assez faible montre que le nombre de succès reste en majorité proche de la moyenne.

VI. Autres lois ?

exemples : bernoulli, geométrique, poisson, gains,....