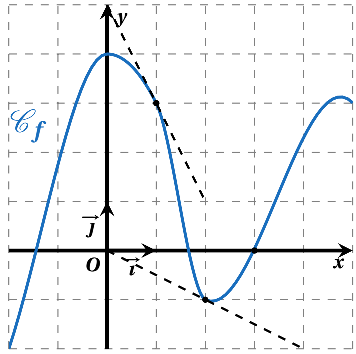
# Série 1

## Exercice 1

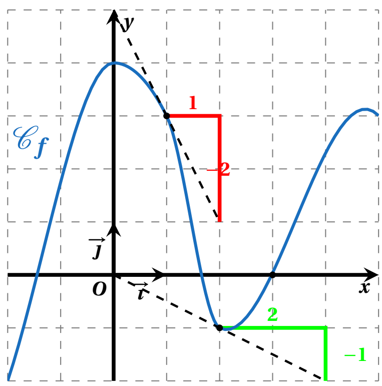
On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.




1. Donner sans justifier $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Quel semble être le nombre dérivé de $f$ en 0.
3. Quel est le signe de $f'(3)$ ?

**Corrigé**

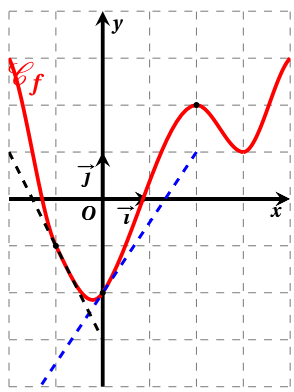
On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.




1. On a :
   $f(1)=3$, en exploitant le point $(1\,;3)$ de la courbe
   $f(3)=0$, c'est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
   $f'(1)=-2$, c'est le coefficient directeur de la tangente (rouge)
   $f'(2)=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5$, c'est le coefficient directeur de la tangente (vert)
2. En 0, la tangente semble être horizontale, donc avec un coefficient directeur égal à 0, soit : $f'(0)=0$
3. Au niveau du point d'abscisse 3 de la courbe, la tangente sera une droite qui « montera » , donc, $f'(3)>0$.

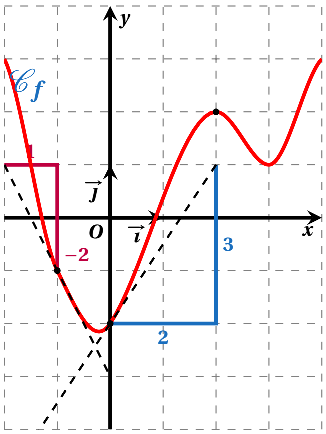
## Exercice 2

On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-2;5]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$. On a tracé les tangentes à la courbe en $-1$ et en 0.




1. Lire graphiquement et sans justifier $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Lire graphiquement le nombre dérivé de $f$ en $-1$.
3. Quel est le signe de $f'(1)$ ? Quel est le signe de $f'(2{,}5)$ ?

**Corrigé**




On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-2;5]$.

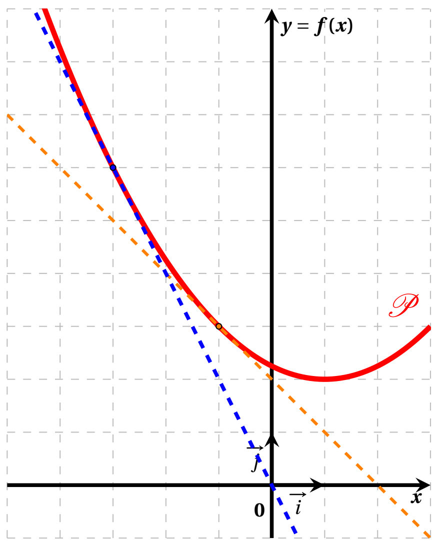
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$. On a tracé les tangentes à la courbe en $-1$ et en $0$.

1. On a : $f'(0) = 1{,}5$ et $f'(2) = 0$ (tangente horizontale).
2. $f'(-1) = -2$.
3. $f'(1) > 0$ car la tangente en 1 « monte » .

   $f'(2{,}5) < 0$ car la tangente en 2,5 « descend »

## Exercice 3

On considère la fonction $f$ définie sur $[-5\,;\,3]$, dont la représentation graphique $\mathscr{P}$ dans un repère orthonormal est la portion de parabole ci-dessous.




1. a) Déterminer par lecture graphique $f(-3)$ et $f'(-3)$.

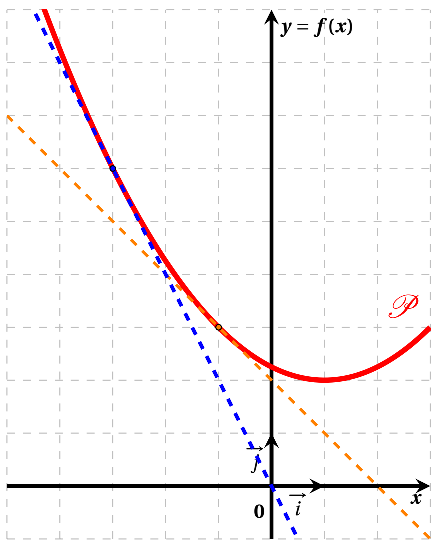
   b) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse $-3$.
2. a) Donner, par lecture graphique $f(-1)$ et $f'(-1)$.

   b) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse $-1$.
3. a) Que pouvez-vous dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ?

   b) Quel est alors le nombre dérivé de $f$ en 1 ?
4. Quel est le **signe** de $f'(2)$ ?

**Corrigé**

On considère la fonction $f$ définie sur $[-5\,;\,3]$, dont la représentation graphique $\mathscr{P}$ dans un repère orthonormal est la portion de parabole ci-dessous.




1. a) $f(-3) = 6$ et $f'(-3) = -2$.

   b) La tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse $-3$ a pour équation

   $y = f'(-3)(x-(-3)) + f(-3) = -2(x+3)+6 = -2x$
2. a) $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = -1$.

   b) La tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse $-1$ a pour équation

   $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) = -1(x+1)+3 = -x+2$
3. a) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale.

   b) On a donc $f'(1) = 0$?
4. $f'(2) > 0$ car la tangente en 2 est croissante.

## Exercice 4

Compléter le tableau suivant :

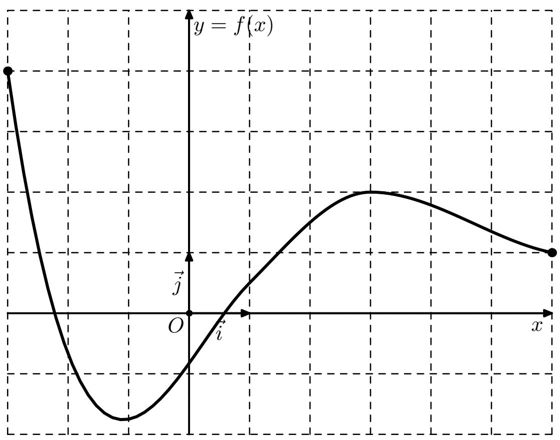
| **Registre géométrique** | **Registre algébrique** |
|---|---|
| | $f(-2)=3$ |
| La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\,;3)$ a pour coefficient directeur 4 | |
| | $f'(1)=0$ |
| $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 2 | |
| | $f'(4)=0{,}5$ et $f(4)=1$ |
| La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 est parallèle à la droite d'équation $2y+3x-5=0$ | |
| | $f'(-4)=f'(6)$ |
| La courbe « monte » aux alentours de $x=2$ | |
| | $E(0\,;4)\in\mathscr{C}_f$ |
| La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 5 | |
| La tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 est verticale | |
| Le point $A(-1\,;5)$ est sur la courbe de $f$ | |

**Corrigé**

| Registre géométrique | Registre algébrique |
|---|---|
| La courbe passe par le point de coordonnées $(-2\,;3)$ | $f(-2)=3$ |
| La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\,;3)$ a pour coefficient directeur 4 | $f'(2)=4$ |
| La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 0 | $f'(1)=0$ |
| $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 2 | $f(2)=0$ |
| La courbe passe par le point de coordonnées $(4\,;1)$ et a une tangente en ce point de coefficient directeur égal à 0.5 | $f'(4)=0{,}5$ et $f(4)=1$ |
| La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 est parallèle à la droite d'équation $2y+3x-5=0$ | $f'(3)=-\dfrac{3}{2}$ |
| Les tangentes à la courbe au points d'abscisse $-4$ et 6 sont parallèles | $f'(-4)=f'(6)$ |
| La courbe « monte » aux alentours de $x=2$ | $f'(2)>0$ |
| La courbe passe par le point de coordonnées $(0\,;4)$ | $E(0\,;4)\in\mathscr{C}_f$ |
| La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 5 | $f'(5)=0$ |
| La tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 est verticale | $f$ n'est pas dérivable en 0 |
| Le point $A(-1\,;5)$ est sur la courbe de $f$ | $f(-1)=5$ |

## Exercice 5

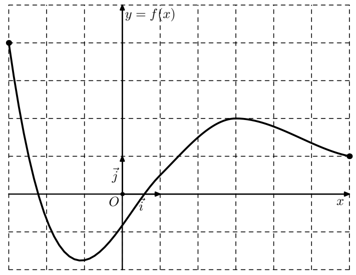
On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-3\,;\,6]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ ci-dessous.




Ranger dans l'ordre croissant les nombres $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

**Corrigé**

On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $[-3\,;\,6]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
Ranger dans l'ordre croissant les nombres $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.




Les tangentes en $-2$ et en 5 vont « descendre », mais en 5 elle « descend » moins vite qu'en $-2$, donc, $f'(-2) < f'(5)$.

En 3, la tangente est horizontale, donc, $f'(3) = 0$.

En 1 la tangente « monte », donc, $f'(1) > 0$.

Donc, on a : $f'(-2) < f'(5) < f'(3) < f'(1)$.

# Série 2

## Exercice 6

**1.** $f$ est la fonction carré définie par $f(x) = x^2$ pour tout réel $x$.

**a)** Calculer le taux d'accroissement de $f$ entre 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$. En déduire la limite de ce taux d'accroissement lorsque $h$ tend vers 0, limite qui est aussi notée $f'(1)$.

**b)** En déduire une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1

**2.** $f$ est la fonction cube définie par $f(x) = x^3$ pour tout réel $x$.

**a)** Démontrer que pour tout nombres réels $a$ et $b$ : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

**b)** Calculer le taux d'accroissement de $f$ entre 10 et $10+h$ avec $h \neq 0$. En déduire la limite de ce taux d'accroissement lorsque $h$ tend vers 0. En déduire $f'(10)$.

**c)** En déduire une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10.

**3.** $f$ est la fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout réel $x \neq 0$.

Montrer, comme dans les deux questions précédents, que la fonction $f$ est dérivable en $x = 1$

**Corrigé**

**1.** $f$ est la fonction carré définie par $f(x) = x^2$ pour tout réel $x$.

**a)** Pour tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h. \qquad \lim_{h\to 0}(2+h) = 2 = f'(1)$$

**b)** L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$.

On a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$, soit l'équation : $y = 2(x-1)+1$, ou encore : $y = 2x-1$

**2.** $f$ est la fonction cube définie par $f(x) = x^3$ pour tout réel $x$.

**a)** $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \ldots = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

**b)** Pour tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(10+h)-f(10)}{10+h-10} = \frac{1000+300h+30h^2+h^3-1000}{h} = 300+30h+h^2$$

$$\lim_{h\to 0}(300+30h+h^2) = 300 = f'(10)$$

**c)** L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10 est : $y = f'(10)(x-10)+f(10)$.

On a $f(10) = 1\,000$ et $f'(10) = 300$, soit l'équation : $y = 300(x-10)+1\,000$,

ou encore : $y = 300x-2000$

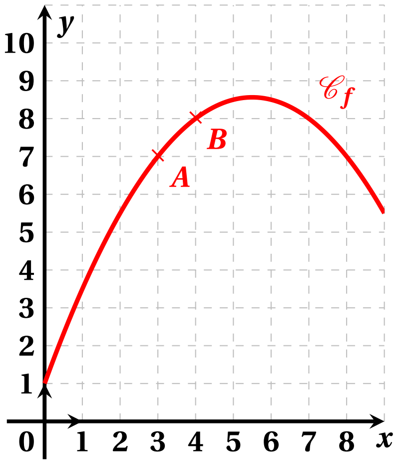
**3.** $f$ est la fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout réel $x$.

Pour tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-h}{1+h}\times\frac{1}{h} = \frac{-1}{1+h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{1+h}\right) = -1 = f'(1)$$

## Exercice 7




On a tracé ci-contre la modélisation d'une colline à l'aide d'une parabole. C'est la représentation graphique de la fonction $f$ définie par

$$\boldsymbol{f(x) = -0{,}25\,x^2 + 2{,}75\,x + 1}$$

**Problème :** Contrairement aux fonctions affines dont la représentation est une droite de **pente constante** (le coefficient directeur!), les fonctions de degré 2 sont représentées par des paraboles qui n'ont **pas une pente constante**.

**Question :** La « pente » en $A$ est-elle deux fois plus grande qu'en $B$?

**Corrigé**

On parle de la pente aux points $A$ et $B$, c'est à dire de la pente de la tangente à la courbe aux points $A(3;7)$ et $B(4;8)$.

Il faut donc déterminer et comparer $f'(3)$ et $f'(4)$.

• $f(3) = -0{,}25 \times 3^2 + 2{,}75 \times 3 + 1 = 7$ (on vérifie si la valeur est bien exacte)

$f(3+h) = -0{,}25(3+h)^2 + 2{,}75(3+h) + 1 = -0{,}25(9+6h+h^2) + 8{,}25 + 2{,}75h + 1$

$\quad = -2{,}25 - 1{,}5h - 0{,}25h^2 + 8{,}25 + 2{,}75h + 1 = -0{,}25h^2 + 1{,}25h + 7$

Ainsi : $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{-0{,}25h^2 + 1{,}25h + 7 - 7}{h} = \dfrac{-0{,}25h^2 + 1{,}25h}{h} = -0{,}25h + 1{,}25$

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0}(-0{,}25h + 1{,}25) = 1{,}25 = f'(3)}$

• $f(4) = -0{,}25 \times 4^2 + 2{,}75 \times 4 + 1 = 7$

$f(4+h) = -0{,}25(4+h)^2 + 2{,}75(4+h) + 1 = -0{,}25(16+8h+h^2) + 11 + 2{,}75h + 1$

$\quad = -4 - 2h - 0{,}25h^2 + 11 + 2{,}75h + 1 = -0{,}25h^2 + 0{,}75h + 8$

Ainsi : $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{-0{,}25h^2 + 0{,}75h + 8 - 8}{h} = \dfrac{-0{,}25h^2 + 0{,}75h}{h} = -0{,}25h + 0{,}75$

$\boxed{\lim\limits_{h\to 0}(-0{,}25h + 0{,}75) = 0{,}75 = f'(4)}$

On a $2 \times f'(4) \neq f'(3)$, donc la « pente » en $A$ n'est pas deux fois plus grande qu'en $B$.

## Exercice 8

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3\,x+4}$.

On se propose de calculer le nombre dérivé de $f$ en 4.

1. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $4 + h \geqslant -\dfrac{4}{3}$, vérifier que $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{\sqrt{16+3\,h} - 4}{h}$.
2. En multipliant et en divisant par $\sqrt{16+3\,h}+4$, montrer que $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{3}{\sqrt{16+3\,h}+4}$. __Remarque__ On dit que $\sqrt{16+3\,h}+4$ est l'expression conjuguée de $\sqrt{16+3\,h} - 4$.
3. En déduire le nombre dérivé de $f$ en 4 puis une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 4.

**Corrigé**

1. On a $f(4) = \sqrt{3\times 4+4} = \sqrt{16} = 4$ et $f(4+h) = \sqrt{3(4+h)+4} = \sqrt{16+3h}$

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{\sqrt{16+3h}-4}{h}$$

**2.** On a : $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{\sqrt{16+3h}-4}{h}=\dfrac{(\sqrt{16+3h}-4)(\sqrt{16+3h}+4)}{h(\sqrt{16+3h}+4)}$

$(\sqrt{16+3h}-4)(\sqrt{16+3h}+4)=(\sqrt{16+3h})^2-4^2=16+3h-16=3h$

Donc : $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{3h}{h(\sqrt{16+3h}+4)}=\dfrac{3}{\sqrt{16+3h}+4}$

**3.** On a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{16+3h}+4}=\dfrac{3}{\sqrt{16}+4}=\dfrac{3}{8}=f'(4)$

Donc le nombre dérivé de $f$ en 4 est égal à $\dfrac{3}{8}$.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 est de la forme : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$, soit : $y=\dfrac{3}{8}(x-4)+4$ soit encore : $\dfrac{3}{8}x+2{,}5$

# Série 3

## Exercice 9

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Nous avons déjà eu l'occasion de calculer le nombre dérivé de $f$ en 1 : on a $f'(1) = 2$. On peut calculer de même $f'(2) = 4$ et $f'(3) = 6$ mais cela est très long.

***Objectif :*** calculons le nombre dérivé de $f$ pour un réel $a$.

1. Soient $h \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le taux d'accroissement $T(h)$ de $f$ en $a$ et le simplifier.
2. Déterminer alors la limite du taux d'accroissement (il doit y avoir du $a$ !!).
3. La fonction carrée admet-elle un nombre dérivé pour tout $a$ de $\mathbb{R}$ ?
4. Calculer rapidement (de tête) $f'(-3)$, $f'(7)$ et $f'(1{,}234)$.

**Corrigé**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Nous avons déjà eu l'occasion de calculer le nombre dérivé de $f$ en 1 : on a $f'(1) = 2$. On peut calculer de même $f'(2) = 4$ et $f'(3) = 6$ mais cela est très long.

***Objectif :*** calculons le nombre dérivé de $f$ pour un réel $a$.

1. Pour tout $h \neq 0$, on a $T(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$
2. $\lim\limits_{h \to 0} (2a + h) = 2a$
3. La fonction carrée admet un nombre dérivé pour tout $a$ de $\mathbb{R}$ puisque $\lim\limits_{h \to 0} (2a + h) = 2a = f'(a)$
4. $f'(-3) = 2 \times (-3) = -6$, $f'(7) = 2 \times 7 = 14$ et $f'(1{,}234) = 2 \times 1.234 = 2{,}468$

## Exercice 10

On considère la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de $f$ en deux points d'abscisses opposées.

**Corrigé**

Soit $a$ une abscisse, l'abscisse opposée est donc $-a$.
On veut comparer $f'(a)$ et $f'(-a)$ pour tout $a$ nombre réel.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :
$f(a) = a^3$, $f(a+h) = (a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$,
donc : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} = \dfrac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$
On a : $\lim\limits_{h \to 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 = f'(a)$
On a $f'(-a) = 3 \times (-a)^2 = 3a^2 = f'(a)$.
Donc, les tangentes à la courbe représentative de f en deux points d'abscisses opposées ont la même pente, elles sont donc parallèles.

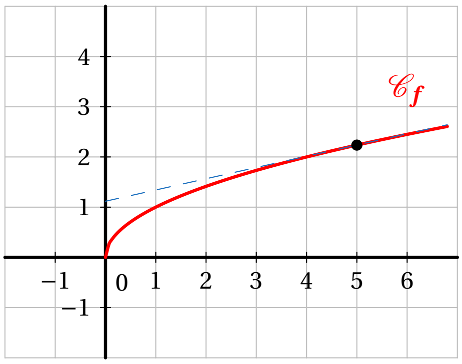
## Exercice 11

On travaille avec la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0\,; +\infty[$ et dont le graphe $\mathscr{C}_f$ est donné ci-dessous.

**1.** **a)** En vous aidant d'un argument graphique, pourquoi peut-on affirmer que la fonction racine carrée est dérivable en 5 ?

**b)** Montrer alors que la valeur exacte de $f'(5)$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, en utilisant le taux d'accroissement.

**c)** En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5




**2.** **a)** Que peut-on dire de la tangente, $T_0$, à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

**b)** Donner une équation de $T_0$. Que dire de son coefficient directeur ?

**Corrigé**

On travaille avec la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0\,; +\infty[$ et dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.

**1.** **a)** La courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, qui donc admet un coefficient directeur. Ainsi, $f'(5)$ existe et la fonction racine carrée est dérivable en 5

**b)** On doit étudier $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$.

On a :

- $f(5) = \sqrt{5}$
- $f(5+h) = \sqrt{5+h}$
- $f(5+h) - f(5) = \sqrt{5+h} - \sqrt{5}$
- $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} = \dfrac{(\sqrt{5+h}-\sqrt{5})(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})}$

$$= \frac{(\sqrt{5+h})^2 - (\sqrt{5})^2}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})} = \frac{5+h-5}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})}$$

Donc, $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{h}{h(\sqrt{5+h}+\sqrt{5})} = \dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$

- Et finalement $f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

**c)** On sait que l'équation de la tangente est : $y = f'(5)(x-5) + f(5)$, il suffit de remplacer les valeurs connues.

$y = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}(x-5) + \sqrt{5} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}x - \dfrac{5}{2\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}x + \dfrac{5}{2\sqrt{5}}$.

**2.** **a)** La tangente, $T_0$, à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 existe, mais c'est une tangente verticale, puisque c'est l'axe des ordonnées lui-même.

**b)** On a $T_0$ qui a pour équation $x = 0$.

Comme la droite est verticale, elle n'a pas de coefficient directeur. Ainsi la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

## Exercice 12

On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

***Objectif :*** Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $A(-3\,;8)$ ?

1. On appelle $T_a$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

   Déterminer l'expression de $T_a$.

2. En déduire s'il existe des tangentes qui passent par le point $A$ en particulier.

**Corrigé**

1. On sait que $T_a$ a une tangente de la forme : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, avec $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$

   soit, $y = 2a(x-a) + a^2$ et on a donc l'équation : $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ soit enfin : $y = 2ax - a^2$

2. Pour que le point $A$ appartienne à la tangente $T_a$, on doit donc avoir : $8 = 2a \times (-3) - a^2$, ce qui revient à : $a^2 + 6a + 8 = 0$.

   On a : $\Delta = 4 > 0$, donc 2 racines : $a_1 = \dfrac{-6+\sqrt{4}}{2} = -2$ et $a_2 = \dfrac{-6-\sqrt{4}}{2} = -4$

   Autrement dit, cela signifie que les tangentes à la courbe aux points d'abscisse $-2$ et $-4$, passent toutes les deux par le point $A$.

# Série 4

## Exercice 13

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2x - 4$ sur $\mathbb{R}$
2. $h(x) = \dfrac{3}{4}x^3 - \dfrac{2x}{5}$ sur $\mathbb{R}$
3. $g(x) = (x+1)(3x-4)$ sur $\mathbb{R}$
4. $j(x) = 2x - 1 - \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

**Corrigé**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f'(x) = 1{,}5x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$
2. $h'(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{2}{5}$ sur $\mathbb{R}$
3. $g(x) = 3x^2 - x - 4$ sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x) = 6x - 1$
4. $j'(x) = 2 + \dfrac{4}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$

## Exercice 14

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

1. a) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1$.

   b) Le point $E(-4;-3)$ appartient-il à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-3$.
2. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ dont le coefficient directeur vaut $-4$ ? Si oui, en quels points ?
3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite $D$ d'équation $y = -7x + 5$ ? Si oui, en quels points ?
4. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ horizontales ? Si oui, en quels points ?

**Corrigé**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ et donc $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

1. a) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1$ est de la forme $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ avec $f(-1) = 10$ et $f'(-1) = -5$

   On obtient $y = -5(x+1) + 10$ $\boxed{\text{La tangente en } -1 \text{ a pour équation } y = -5x + 5}$

   b) L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-3$ est de la forme $y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$ avec $f(-3) = 8$ et $f'(-3) = 11$

   On obtient $y = 11(x+3) + 8$ $\boxed{\text{La tangente en } -3 \text{ a pour équation } y = 11x + 41}$

   Le point $E(-4;-3)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-3$ si et seulement si $y_E = 11x_E + 41$

   Or $11x_E + 41 = 11 \times (-4) + 41 = -44 + 41 = -3 = y_E$ donc $\boxed{E \text{ appartient bien à cette tangente}}$
2. Il existe des tangentes à $\mathscr{C}_f$ de coefficient directeur $-4$ si et seulement si $f'(x) = -4$

$$f'(x) = -4 \iff 3x^2 + 4x - 4 = -4 \iff 3x^2 + 4x = 0 \iff x(3x+4) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\text{La courbe admet deux tangentes de coef directeur } -4 \text{ aux points d'abscisse } 0 \text{ et } -\frac{4}{3}}$$

3. Il existe des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite $y = -7x+5$ si et seulement si $f'(x) = -7$

$$\begin{aligned} f'(x) = -7 &\Leftrightarrow 3x^2+4x-4 = -7 \\ &\Leftrightarrow 3x^2+4x+3 = 0 \quad \text{or} \quad \Delta = 4^2-4\times3\times3 < 0 \text{ donc pas de racine} \end{aligned}$$

$f'(x) = -7$ n'a pas de solution donc $\boxed{\text{pas de tangente parallèle à la droite } y = -7x+5}$

4. Il existe des tangentes à $\mathscr{C}_f$ horizontale si et seulement si $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2+4x-4 = 0 \quad \text{or} \quad \Delta = 4^2-4\times3\times(-4) = 64 \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{-4-\sqrt{64}}{6} \text{ ou } x_2 = \frac{-4+\sqrt{64}}{6} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La courbe admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisse } -2 \text{ et } \frac{2}{3}}$$

## Exercice 15

Une entreprise fabrique une boisson conditionnée en bouteille d'un litre. Le coût total de production, exprimé en euro, est donné par $C_T(x) = 4x^3-20x^2+80x+100$, où $x$ représente le volume exprimé en centaines de litres, $x$ variant dans l'intervalle $[0;5]$.

Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total.

1. Déterminer l'expression du coût marginal $C_M$ en fonction de $x$.
2. En déduire le coût marginal pour 500 litres produits.
3. Pour quelle production le coût marginal est-il minimal ?

**Corrigé**

1. On a $C_M(x) = C'_T(x) = 4\times3x^2-20\times2x+80 = 12x^2-40x+80$
2. Le coût marginal pour 500 litres produits correspond à $C_M(5) = 12\times5^2-40\times5+80 = 180$.

   Soit un coût marginal de 180 euros.

   *Pour info, Cela signifie que le coût de production du 500ème litre revient à 180 euros, sachant que le coût total de production est lui de $C_T(5) = 500$ euros.*
3. On a le coût marginal qui est modélisé par une fonction du second degré, telle que $a = 12 > 0$, elle atteint donc un minimum $(\beta)$ en $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$.

   Autrement dit, le coût engendré par la production du 167ème litre est le plus petit coût possible.

   Ce minimum est alors égal à $C_M\left(\dfrac{5}{3}\right) = 12\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-40\times\left(\dfrac{5}{3}\right)+80 = \dfrac{140}{3} \approx 47$ euros.

## Exercice 16

Un puits de 44,1 m de profondeur est à sec. On lâche une pierre dans ce puits à l'instant $t = 0$ s.

La loi horaire du déplacement est donnée par $d(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 = 4{,}9t^2$, avec $d(t)$ en mètres et $t$ en secondes.

1. Calculer au bout de combien de secondes la pierre touche le fond du puits.
2. La vitesse instantanée est le nombre dérivé de la distance en fonction du temps.

   Calculer la vitesse instantanée de la pierre au moment où elle touche le fond.

1. On a $4{,}9t^2 = 44{,}1$, au fond du puits, soit : $t = \sqrt{\dfrac{44{,}1}{4{,}9}} = \sqrt{9} = 3$.

   Donc, la pierre met 3 secondes pour toucher le fond du puits.

2. La vitesse instantanée est le nombre dérivé de la distance en fonction du temps.

   On veut donc $d'(3)$.

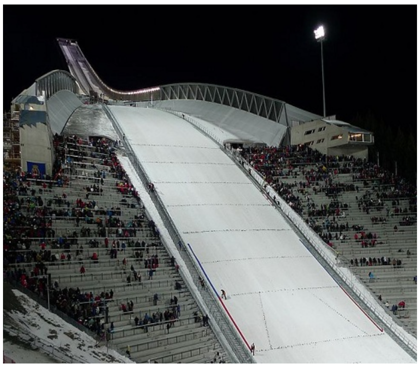
   On a $d'(t) = 4{,}9 \times 2t = 9{,}8t$, ainsi, $d'(3) = 9{,}8 \times 3 = 29{,}4$.

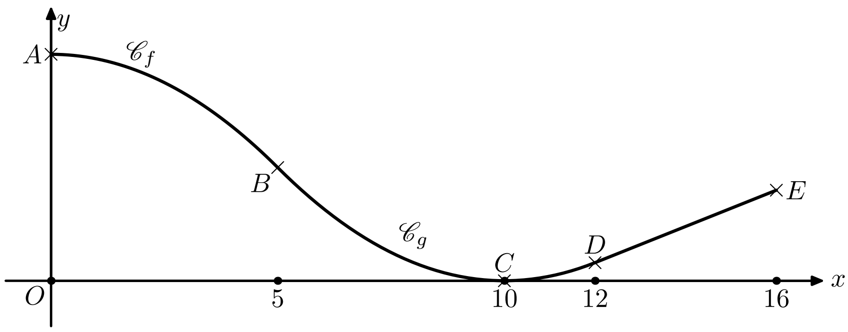
   Donc la vitesse instantanée est de 29,4 m/s au moment où la pierre arrive au fond du puits.

## Exercice 17

**Objectif** Étudier la piste d'atterrissage du tremplin de ski olympique appelé l'**Holmenkollbakken**

On modélise la piste d'atterrissage à l'aide de deux arcs de paraboles puis d'une dernière montée rectiligne pour finir de ralentir le skieur (l'unité utilisée n'est pas le mètre pour simplifier les calculs).






1. **Le début de la piste, un premier arc de parabole pour $x \in [0;5]$**

   Déterminer l'expression de la fonction $f$ qui modélise l'arc de parabole entre $A$ et $B$ sachant que :

   • cet arc passe par $A(0;5)$

   • la tangente en $A$ est horizontale

   • cet arc passe par $B(5;2{,}5)$

2. **Le deuxième arc de parabole pour $x \in [5;12]$**

   Déterminer l'expression de la fonction $g$ qui modélise l'arc de parabole entre $B$ et $C$ sachant que :

   • cet arc passe par $B(5;2{,}5)$

   • cet arc passe par $C(10;0)$.

   • la tangente en $C$ est horizontale

3. **Étude du raccord au point $B$ entre les deux arcs de parabole**

   Afin que la piste d'atterrissage soit satisfaisante, il ne doit pas y avoir de rupture de pente.

   Est-ce le cas avec votre modélisation au point $B$ où les deux arcs de paraboles se rejoignent ?

4. **La fin de la piste pour finir de freiner pour $x \in [12;16]$**

   La droite $(DE)$ est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point $D$, d'abscisse 12.

   Déterminer l'altitude du point $E$ d'abscisse 16.

## I. Premier modèle avec deux arcs de paraboles

### 1. Le début de la piste, un premier arc de parabole pour $x \in [0;5]$

On a une parabole, donc on travaille avec une fonction du second degré, et on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a$, $b$ et $c$ étant les paramètres à trouver.

- cet arc passe par $A(0;5)$ donc : $f(0) = 5$.
  Autrement dit : $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 5$, soit : $\boxed{c = 5}$ et $f(x) = ax^2 + bx + 5$.
- la tangente en $A$ est horizontale donc : $f'(0) = 0$.
  On a $f'(x) = 2ax + b$, on en déduit alors $f'(0) = 2a \times 0 + b = 0$, soit : $\boxed{b = 0}$ et $f(x) = ax^2 + 5$.
- cet arc passe par $B(5;2{,}5)$ donc : $f(5) = 2{,}5$.
  Autrement dit : $a \times 5^2 + 5 = 2{,}5$, $25a = -2{,}5$, $a = \dfrac{-2{,}5}{25} = -0{,}1$
  soit : $\boxed{a = -0{,}1}$ et $f(x) = -0{,}1x^2 + 5$.
  Donc pour $x \in [0;5]$, on a : $\boxed{f(x) = -0{,}1\,x^2 + 5}$

### 2. Le deuxième arc de parabole pour $x \in [5;12]$

On a encore une parabole, donc on travaille avec une fonction du second degré, et on pose $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a$, $b$ et $c$ étant les paramètres à trouver.

- cet arc passe par $B(5;2{,}5)$, donc : $g(5) = 2{,}5$, soit : $a \times 5^2 + b \times 5 + c = 2{,}5$, ou encore : $\boxed{25a + 5b + c = 2{,}5}$
- cet arc passe par $C(10;0)$, donc : $g(10) = 0$, soit : $a \times 10^2 + b \times 10 + c = 0$, ou encore : $\boxed{100a + 10b + c = 0}$.
- la tangente en $C$ est horizontale donc : $g'(10) = 0$.
  On a $g'(x) = 2ax + b$, on en déduit alors $g'(10) = 2a \times 10 + b = 0$, soit : $\boxed{20a + b = 0}$.

  On a donc le système suivant : $\begin{cases} 25a + 5b + c = 2{,}5 \\ 100a + 10b + c = 0 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 25a + 5 \times (-20a) + c = 2{,}5 \\ 100a + 10 \times (-20a) + c = 0 \\ b = -20a \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 25a - 100a + c = 2{,}5 \\ 100a - 200a + c = 0 \\ b = -20a \end{cases} \iff \begin{cases} -75a + c = 2{,}5 \\ -100a + c = 0 \\ b = -20a \end{cases} \iff L_1 - L_2 : \begin{cases} 25a = 2{,}5 \\ -100a + c = 0 \\ b = -20a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{2{,}5}{25} = 0{,}1 \\ c = 100a = 10 \\ b = -20a = -2 \end{cases}$$

Donc, pour $x \in [5;12]$, $\boxed{g(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 10}$

### 3. Étude du raccord au point $B$ entre les deux arcs de parabole

Pour vérifier s'il n'y a pas une rupture de pente, il faut simplement calculer $f'(5)$ et $g'(5)$ et vérifier qu'ils sont bien égaux.

On a : $f(x) = -0{,}1\,x^2 + 5$, donc, $f'(x) = -0{,}2\,x$ et $f'(5) = -0{,}2 \times 5 = -1$

On a : $g(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 10$, donc $g'x) = 0{,}2x - 2$ et $g'(5) = 0{,}2 \times 5 - 2 = -1$

Donc, on a bien $f'(5) = g'(5)$, le raccord se fait donc sans rupture de pente.

4. **La fin de la piste pour finir de freiner pour $x \in [12;16]$**

   Pour déterminer l'altitude du point $E$ d'abscisse 16, il faut donc déterminer l'ordonnée du point $E$, sachant qu'il est sur la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 12.

   On a : $g(12) = 0{,}1 \times 12^2 - 2 \times 12 + 10 = 0{,}4$ et $g'(12) = 0{,}2 \times 12 - 2 = 0{,}4$.

   D'où l'équation de tangente : $y = g'(12)(x-12) + g(12)$ qui donne ici : $y = 0{,}4(x-12) + 0{,}4$, soit $y = 0{,}4x - 4{,}4$ sous la forme réduite.

   Au point d'abscisse 16, on a : $y_E = 0{,}4 \times 16 - 4{,}4 = 2$. Donc l'altitude du point $E$ est de 2 unités

### Second modèle avec un polynôme de degré 3

On a : $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. On traduit chacune des informations :

   - $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de $h$, doit passer par $A(0;5)$, donc : $h(0) = 5$,

     soit : $h(0) = a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 5$.

     Soit : $\boxed{d = 5}$ et $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 5$.

   - la tangente à $\mathscr{C}_h$ en $A$ doit être horizontale, donc, $h'(0) = 0$.

     On a $h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, donc : $h'(0) = 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0$, soit : $\boxed{c = 0}$ et $h(x) = ax^3 + bx^2 + 5$.

   - $\mathscr{C}_h$, la courbe représentative de $h$, doit passer par $C(10;0)$, donc : $h(10) = 0$,

     soit : $h(10) = a \times 10^3 + b \times 10^2 + 5 = 0$.

     Ce qui donne $1000a + 100b + 5 = 0$ ou encore $\boxed{200a + 20b + 1 = 0}$ (en simplifiant par 5)

   - la tangente à $\mathscr{C}_h$ en $C$ doit être horizontale, donc, $h'(10) = 0$.

     On a $h'(x) = 3ax^2 + 2bx$, donc : $h'(10) = 3a \times 10^2 + 2b \times 10 = 0$, ce qui donne : $300a + 20b = 0$ ou encore : $\boxed{30a + 2b = 0}$ (en simplifiant par 10)

     On doit donc résoudre le système suivant : $\begin{cases} 200a + 20b + 1 = 0 \\ 30a + 2b = 0 \end{cases}$

     On a : $\begin{cases} 200a + 20b + 1 = 0 \\ 30a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 200a + 20 \times (-15a) + 1 = 0 \\ b = \dfrac{-30a}{2} = -15a \end{cases} \iff \begin{cases} 200a - 300a + 1 = 0 \\ b = -15a \end{cases} \iff \begin{cases} -100a = \\ b = -15a \end{cases}$

     $\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{100} = 0{,}01 \\ b = -15 \times 0{,}01 = -0{,}15 \end{cases}$ Donc, $\boxed{h(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}15x^2 + 5}$

2. $h(5) = 0{,}01 \times 5^3 - 0{,}15 \times 5^2 + 5 = 2{,}5$. Donc $\mathscr{C}_h$ passe bien par le point $B$.

3. $h'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}3x$, soit $h'(5) = 0{,}03 \times 5^2 - 0{,}3 \times 5 = -0{,}75 \neq -1$, donc les pentes ne sont pas les mêmes pour les deux modélisations.

## Exercice 18

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des réels.

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

On veut que $\mathscr{C}$ possède les propriétés suivantes :

- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 20.
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
- $\mathscr{C}$ passe par le point $A(-1;18)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3.

**1.** Traduire les quatre informations géométriques fournies sous la forme $f(\ldots) = \ldots$ ou $f'(\ldots) = \ldots$

**2.** Saurez-vous alors retrouver l'expression de la fonction $f$ ?

**Corrigé**

**1.**
- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 20 : donc, $\boxed{\boldsymbol{f(0) = 20}}$, autrement dit : $a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 20$. Donc $\boxed{d = 20}$
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 : donc : $\boxed{\boldsymbol{f'(0) = 0}}$.
  On a : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, donc, $f'(0) = 0$ donne $3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0$. Donc, $\boxed{c = 0}$
- $\mathscr{C}$ passe par le point $A(-1;18)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3 : donc : $\boxed{\boldsymbol{f(-1) = 18 \text{ et } f'(-1) = 3}}$.
  $f(-1) = -a + b - c + d = 18$ ou encore $-a + b - 0 + 20 = 18$ Donc : $\boxed{-a + b = -2}$
  $f'(-1) = 3a - 2b + c = 3$ ou encore $3a - 2b + 0 = 3$ Donc : $\boxed{3a - 2b = 3}$

**2.** Saurez-vous alors retrouver l'expression de la fonction $f$ ?

Il suffit de résoudre le système $\begin{cases} -a + b = -2 \\ 3a - 2b = 3 \\ c = 0 \\ d = 20 \end{cases}$,

ce qui donne en se restreignant aux 2 premières lignes :

$$\begin{cases} b = a - 2 \\ 3a - 2(a-2) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 2 \\ a + 4 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a - 2 \\ a = 3 - 4 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 - 2 = -3 \\ a = -1 \end{cases}$$

On a donc $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 20$