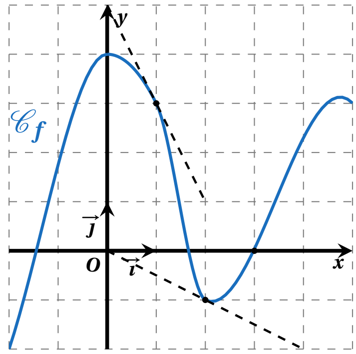
Série 1

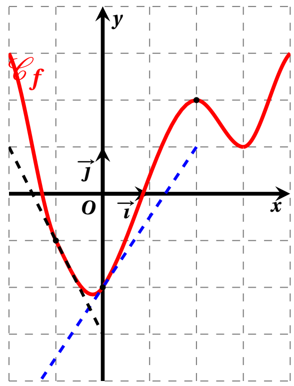
Exercice 1



On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Donner sans justifier $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Quel semble être le nombre dérivé de f en 0.
3. Quel est le signe de $f'(3)$?

Exercice 2

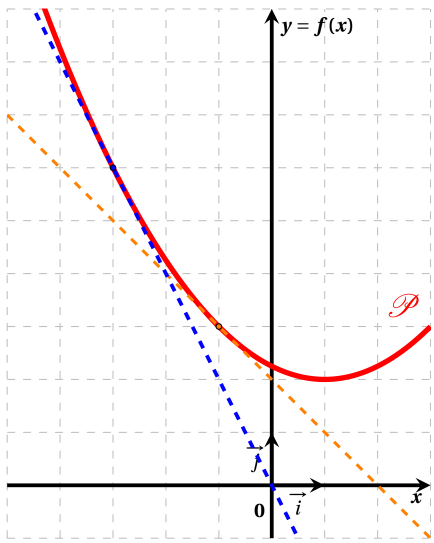


On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2;5]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$. On a tracé les tangentes à la courbe en -1 et en 0.

1. Lire graphiquement et sans justifier $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Lire graphiquement le nombre dérivé de f en -1.
3. Quel est le signe de $f'(1)$? Quel est le signe de $f'(2{,}5)$?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[-5\,;\,3]$, dont la représentation graphique $\mathscr{P}$ dans un repère orthonormal est la portion de parabole ci-dessous.



1. a) Déterminer par lecture graphique $f(-3)$ et $f'(-3)$.
   b) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse -3.
2. a) Donner, par lecture graphique $f(-1)$ et $f'(-1)$.
   b) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse -1.
3. a) Que pouvez-vous dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ?
   b) Quel est alors le nombre dérivé de f en 1 ?
4. Quel est le **signe** de $f'(2)$?

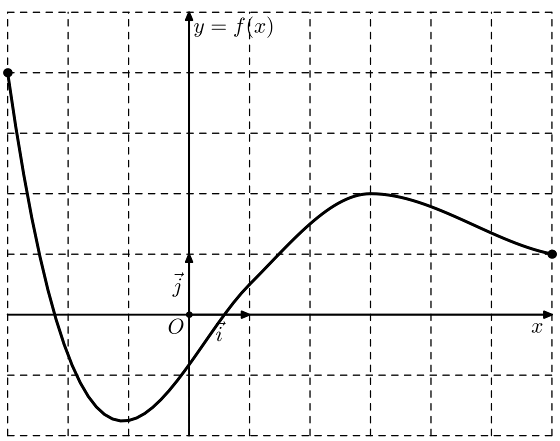
Exercice 4

Compléter le tableau suivant :

Registre géométrique	**Registre algébrique**
	$f(-2) = 3$
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\,;3)$ a pour coefficient directeur 4	
	$f'(1) = 0$
$\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 2	
	$f'(4) = 0{,}5$ et $f(4) = 1$
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 est parallèle à la droite d'équation $2y + 3x - 5 = 0$	
	$f'(-4) = f'(6)$
La courbe « monte » aux alentours de $x = 2$	
	$E(0\,;4) \in \mathscr{C}_f$
La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 5	
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est verticale	
Le point $A(-1\,;5)$ est sur la courbe de f	

Exercice 5

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;\,6]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ ci-dessous.



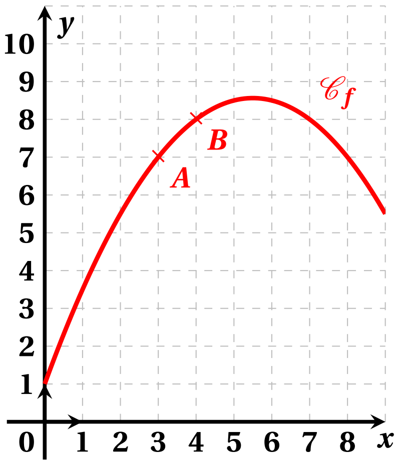
Ranger dans l'ordre croissant les nombres $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

Série 2

Exercice 6

1. f est la fonction carré définie par $f(x) = x^2$ pour tout réel x.
   a) Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$. En déduire la limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0, limite qui est aussi notée $f'(1)$.
   b) En déduire une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1
2. f est la fonction cube définie par $f(x) = x^3$ pour tout réel x.
   a) Démontrer que pour tout nombres réels a et b : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   b) Calculer le taux d'accroissement de f entre 10 et $10+h$ avec $h \neq 0$. En déduire la limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0. En déduire $f'(10)$.
   c) En déduire une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10.
3. f est la fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout réel $x \neq 0$.
   Montrer, comme dans les deux questions précédents, que la fonction f est dérivable en $x = 1$

Exercice 7



On a tracé ci-contre la modélisation d'une colline à l'aide d'une parabole. C'est la représentation graphique de la fonction f définie par

$$\boldsymbol{f(x) = -0{,}25x^2 + 2{,}75x + 1}$$

Problème : Contrairement aux fonctions affines dont la représentation est une droite de **pente constante** (le coefficient directeur !), les fonctions de degré 2 sont représentées par des paraboles qui n'ont **pas une pente constante**.

Question : La « pente » en A est-elle deux fois plus grande qu'en B ?

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{4}{3} ; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$.
On se propose de calculer le nombre dérivé de f en 4.

1. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $4 + h \geqslant -\dfrac{4}{3}$, vérifier que $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{\sqrt{16+3h} - 4}{h}$.
2. En multipliant et en divisant par $\sqrt{16+3h} + 4$, montrer que $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{3}{\sqrt{16+3h}+4}$. **Remarque** On dit que $\sqrt{16+3h}+4$ est l'expression conjuguée de $\sqrt{16+3h} - 4$.
3. En déduire le nombre dérivé de f en 4 puis une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 4.

Série 3

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Nous avons déjà eu l'occasion de calculer le nombre dérivé de f en 1 : on a $f'(1) = 2$. On peut calculer de même $f'(2) = 4$ et $f'(3) = 6$ mais cela est très long.

Objectif : calculons le nombre dérivé de f pour un réel a.

1. Soient $h \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le taux d'accroissement $T(h)$ de f en a et le simplifier.
2. Déterminer alors la limite du taux d'accroissement (il doit y avoir du a !!).
3. La fonction carrée admet-elle un nombre dérivé pour tout a de $\mathbb{R}$?
4. Calculer rapidement (de tête) $f'(-3)$, $f'(7)$ et $f'(1{,}234)$.

Exercice 10

On considère la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de f en deux points d'abscisses opposées.

Exercice 11

On travaille avec la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0\,;+\infty[$ et dont le graphe $\mathscr{C}_f$ est donné ci-dessous.

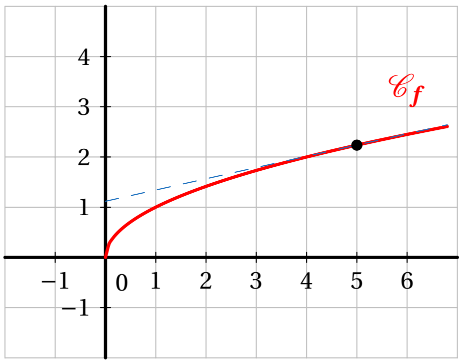
1. **a)** En vous aidant d'un argument graphique, pourquoi peut-on affirmer que la fonction racine carrée est dérivable en 5 ?

   b) Montrer alors que la valeur exacte de $f'(5)$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$, en utilisant le taux d'accroissement.

   c) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5

2. **a)** Que peut-on dire de la tangente, T_0, à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

   b) Donner une équation de T_0. Que dire de son coefficient directeur ?



Exercice 12

On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Objectif : Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $A(-3\,;8)$?

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a, avec $a \in \mathbb{R}$.

   Déterminer l'expression de T_a.
2. En déduire s'il existe des tangentes qui passent par le point A en particulier.

Série 4

Exercice 13

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 + 2x - 4$ sur $\mathbb{R}$
2. $h(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{2x}{5}$ sur $\mathbb{R}$
3. $g(x) = (x+1)(3x-4)$ sur $\mathbb{R}$
4. $j(x) = 2x - 1 - \frac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 14

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

1. a) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

   b) Le point $E(-4;-3)$ appartient-il à la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
2. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ dont le coefficient directeur vaut -4 ? Si oui, en quels points ?
3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite D d'équation $y = -7x + 5$? Si oui, en quels points ?
4. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ horizontales ? Si oui, en quels points ?

Exercice 15

Une entreprise fabrique une boisson conditionnée en bouteille d'un litre. Le coût total de production, exprimé en euro, est donné par $C_T(x) = 4x^3 - 20x^2 + 80x + 100$, où x représente le volume exprimé en centaines de litres, x variant dans l'intervalle $[0\,;5]$.

Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total.

1. Déterminer l'expression du coût marginal C_M en fonction de x.
2. En déduire le coût marginal pour 500 litres produits.
3. Pour quelle production le coût marginal est-il minimal ?

Exercice 16

Un puits de 44,1 m de profondeur est à sec. On lâche une pierre dans ce puits à l'instant $t = 0$ s.

La loi horaire du déplacement est donnée par $d(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4{,}9t^2$, avec $d(t)$ en mètres et t en secondes.

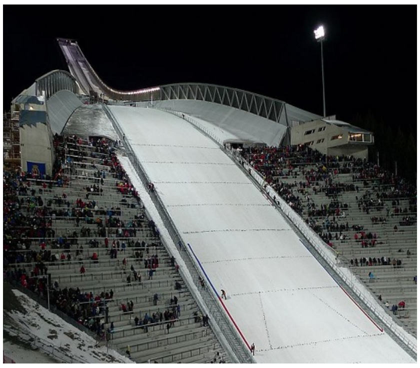
1. Calculer au bout de combien de secondes la pierre touche le fond du puits.
2. La vitesse instantanée est le nombre dérivé de la distance en fonction du temps.

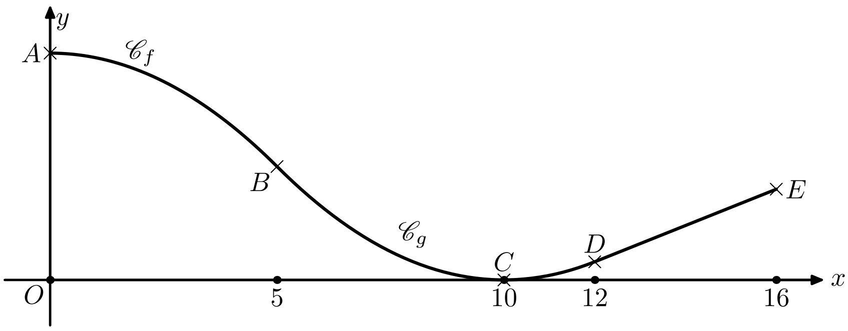
   Calculer la vitesse instantanée de la pierre au moment où elle touche le fond.

Exercice 17

Objectif Étudier la piste d'atterrissage du tremplin de ski olympique appelé l'**Holmenkollbakken**

On modélise la piste d'atterrissage à l'aide de deux arcs de paraboles puis d'une dernière montée rectiligne pour finir de ralentir le skieur (l'unité utilisée n'est pas le mètre pour simplifier les calculs).





1. **Le début de la piste, un premier arc de parabole pour $x \in [0;5]$**

   Déterminer l'expression de la fonction f qui modélise l'arc de parabole entre A et B sachant que :

   • cet arc passe par $A(0;5)$

   • la tangente en A est horizontale

   • cet arc passe par $B(5;2,5)$

2. **Le deuxième arc de parabole pour $x \in [5;12]$**

   Déterminer l'expression de la fonction g qui modélise l'arc de parabole entre B et C sachant que :

   • cet arc passe par $B(5;2,5)$

   • cet arc passe par $C(10;0)$.

   • la tangente en C est horizontale

3. **Étude du raccord au point B entre les deux arcs de parabole**

   Afin que la piste d'atterrissage soit satisfaisante, il ne doit pas y avoir de rupture de pente.

   Est-ce le cas avec votre modélisation au point B où les deux arcs de paraboles se rejoignent ?

4. **La fin de la piste pour finir de freiner pour $x \in [12;16]$**

   La droite (DE) est tangente à $\mathscr{C}_g$ au point D, d'abscisse 12.

   Déterminer l'altitude du point E d'abscisse 16.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des réels.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.
On veut que $\mathscr{C}$ possède les propriétés suivantes :

- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 20.
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
- $\mathscr{C}$ passe par le point $A(-1;18)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3.

1. Traduire les quatre informations géométriques fournies sous la forme $f(\dots) = \dots$ ou $f'(\dots) = \dots$
2. Saurez-vous alors retrouver l'expression de la fonction f ?