Étude 1 : Comment déterminer le nombre de solutions d'une équation ?

Résoudre une équation de la forme $f(x) = k$, c'est trouver toutes les valeurs possibles de l'inconnue x.

Il est donc préférable de savoir s'il y en a et, si oui, combien il y en a...

Le nombre k est un paramètre, un nombre considéré comme connu.

Pour chaque équation (du type $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$), déterminer le nombre de solutions sur l'intervalle I ?

1. $f(x) = 4x^2 + x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
   avec $k = 1$, $k = 4$, $k = 0$, k quelconque
2. $f(x) = 4x^3 - 12x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
   avec $k = 1$, $k = 9$, k quelconque
3. $f(x) = \dfrac{x^4 + x + 1}{x^4 + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
   avec $k = 1$ puis $k = 1{,}1$
4. $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ sur $I = [0\,;\,2]$
   avec $k = 2{,}5$, $k = 1{,}5$, $k = 2$, $k = 1$

Pour les curieux....

François Viète au XVIe siècle soupçonnait déjà que :

"Une équation polynomiale de degré n admet au maximum n solutions."

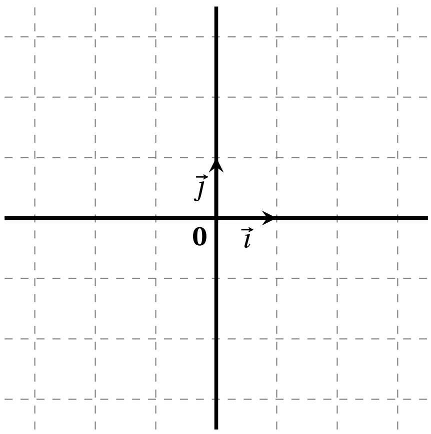
1. Saurez-vous inventer une équation à 23 solutions ?
2. Saurez vous inventer une équation de degré 10 avec 0 solutions ?
3. Saurez vous inventer une équation de degré 15 avec 0 solutions ?
4. Se renseigner sur François VIÈTE, Jean D'ALEMBERT, Karl Friedrich GAUSS et Évariste GALOIS.

Prémices à l'étude 2 : Le problème de la duplication du cube

1. Se renseigner sur cette question antique.
2. Quel savant grec ayant mesuré le rayon de la Terre a relayé cette question ?
3. Version moderne : la duplication du Rubik's cube.
   Quelles sont les dimensions d'un Rubik's cube classique ?
4. Sauriez vous donner les dimensions d'un gros Rubik's cube **deux fois plus volumineux** que le Rubik's cube classique ?

Définition – Fonction partie entière

On appelle partie entière de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
La fonction partie entière est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\lfloor x \rfloor$.



Étude 2 : Comment localiser les solutions d'une équation ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [1 ; 2]$.

2. Réaliser un programme en `Python` qui affiche « f(♠) = ... » où ♠ parcourt les réels de 1 à 2 avec un pas de 0,1.

   Donner alors un encadrement de α à 0,1 près.

3. Voici deux algorithmes permettant de trouver une valeur approchée de α.

   En quoi consiste la méthode qu'ils utilisent ?

```python
# Fonction etudiee strictement croissante
def f(x):
        return x**3 - 2

pas = 0.01
a = 1
n = 0

while f(a) < 0:
        n = n + 1
        a = a + pas

print(a - pas, "< alpha <", a)
print("Nombre d'etapes :", n)
```

Résultat

```
>>> (executing lines 1 to 13 of "<tmp 1>")
1.2500000000000002 < alpha < 1.2600000000000002
Nombre d'etapes : 26
```

```python
# Fonction etudiee monotone
def f(x):
    return x**3 - 2

a = 1
b = 2
precision = 0.01
n = 0

while b-a > precision:
        n = n + 1
        if f((a+b)/2) < 0:
                a = (a+b)/2
        else:
                b = (a+b)/2

print(a, "< alpha <", b)
print("Nombre d'etapes :", n)
```

Résultat

```
>>> (executing lines 1 to 17 of "<tmp 1>")
1.2578125 < alpha < 1.265625
Nombre d'etapes : 7
```

4. Lequel des deux algorithmes nécessite le moins d'étapes pour obtenir une précision de :

   a) 10^{-1} ? **b)** 10^{-4} ? **c)** 10^{-7} ? **d)** 10^{-12} ?

5. Modifier le code pour résoudre (avec une précision de 10^{-6}) les équations suivantes :

   a) $4x^3 + x + 1 = 0$ **b)** $\dfrac{x^4 + x + 1}{x^4 + 1} = 1{,}1$ **c)** $x + \lfloor x \rfloor = 1{,}5$ **d)** $\dfrac{100}{x^2 + \sqrt{x} + 1} = 1$

Étude 3 : Comment accélérer la recherche d'une solution ?

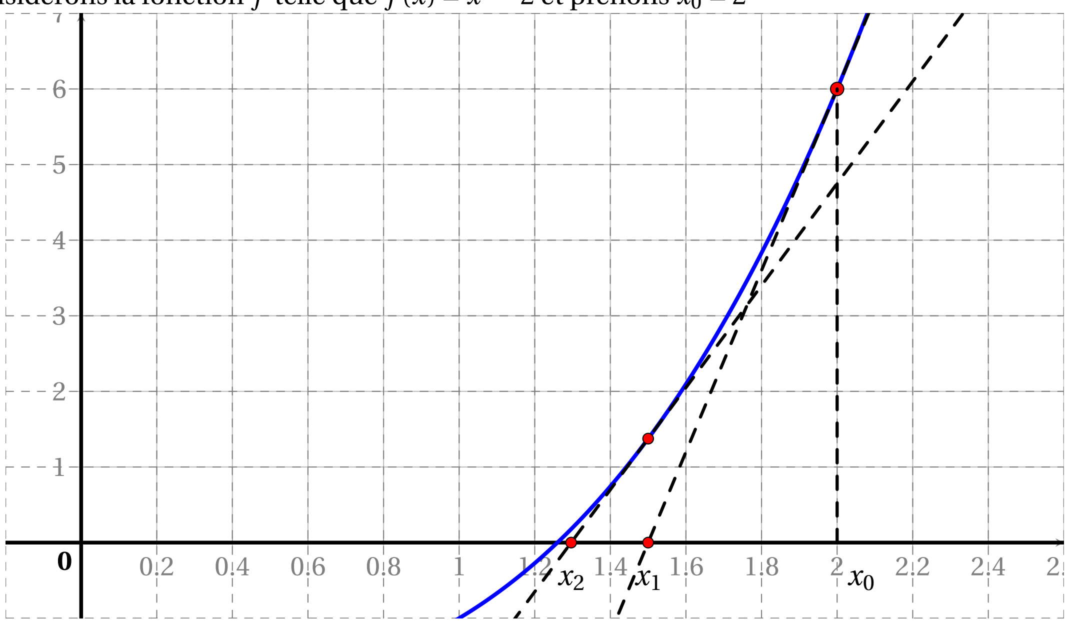
Comme les méthode de balayage et de dichotomie (étude 2), la méthode de Newton sert à déterminer une approximation de la solution α d'une équation de la forme $f(x) = 0$ sur un intervalle I avec f vérifiant les conditions ci-dessous :

- f deux fois dérivable sur I ;
- f strictement convexe (ou strictement concave) ;
- f'' continue sur I.

Cette méthode consiste à construire une suite (x_n) de limite α de la manière suivante :

- On choisit x_0 dans un intervalle I contenant la solution.
- Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_n.

Exemple : Reconsidérons la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 2$ et prenons $x_0 = 2$



1. **Cas particulier de x_1 :** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x_0 = 2$. En déduire x_1.
2. **Cas général :** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en x_n. En déduire que $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 2}{3x_n^2}$.
3. **a)** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > \alpha$.

   b) Démontrer que la suite (x_n) est décroissante.

Ainsi, la suite (x_n) est décroissante minorée.

Le théorème de convergence monotone permet alors d'affirmer que la suite (x_n) converge.

Un autre, le théorème du point fixe, permet de prouver que la limite de (x_n) est bien α.

4. Que va renvoyer la fonction `newton(3)` ?

```python
def g(x):
    return (2*x**3 + 2)/(3*x**2)

def newton(n):
    x = 2
    for k in range(n):
        x = g(x)
    return x
```