Dérivation et tangente

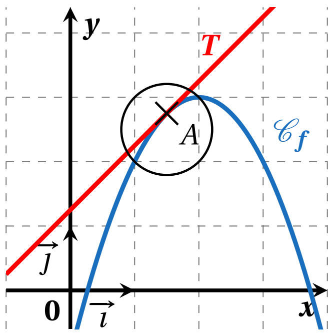
I. Tangente à une courbe en un point

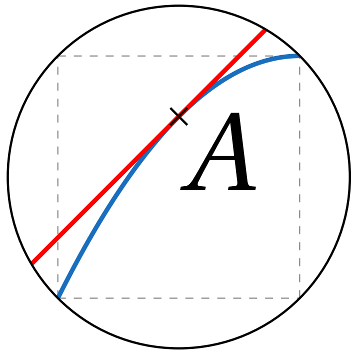
1. Approche graphique

Définition

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en un point A est la droite T passant par A de **même pente** que $\mathscr{C}_f$ au point A.

Remarque : Si on effectue un zoom autour du point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente se confondent.





Zoom au voisinage du point A

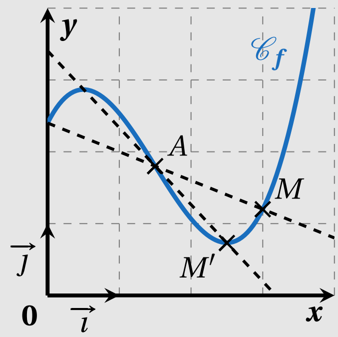
2. Approche algébrique

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a.
Soient $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $M\big(a+h\,;\,f(a+h)\big)$ deux points de la courbe de $\mathscr{C}_f$ avec $h \in \mathbb{R}^*$.
Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a+h$ est le rapport

$$T(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

C'est aussi le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (AM).



Remarque : Lorsque h devient très proche de 0, alors le point M se rapproche du point A et donc la droite (AM) se rapproche de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

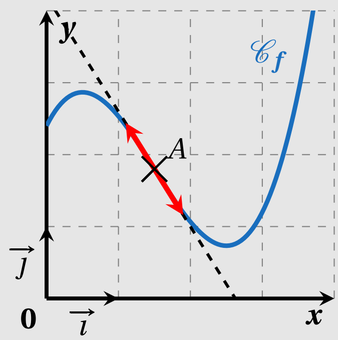
Définition

Lorsqu'il existe, le **nombre dérivé de f en a** noté $f'(a)$ est la limite du taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ lorsque h tend vers 0 ($h \neq 0$)

On dit alors que **f est dérivable en a**.

Ainsi, $$f'(a) = \lim_{h \to 0} T(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.



3. Équation de la tangente à une courbe

Propriété

La droite passant par le point $A\big(a\,;\,f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A**. Son équation réduite est de la forme : $y = f'(a) \times x + p$ ou encore $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

II. Fonction dérivée des fonctions élémentaires

Nous allons désormais fabriquer des formules qui permettent de calculer le nombre dérivé de fonctions simples **pour n'importe quelle valeur de a**.

1. Fonctions dérivées de fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Une démonstration : La fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ est dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f'(a) = 2a}$:

....

....

Exemples :

- Soit $f(x) = 0{,}45x + 1$. Déterminer $f'(2)$ $\quad f'(x) = 0.45$ donc $f'(2) = 0.45$
- Soit $f(x) = x^2$. Déterminer $f'(-0{,}4)$ et $f'(10)$. $\quad f'(x) = 2x$ donc $f'(-0.4) = -0.8$ et $f'(10) = 20$.
- Soit $f(x) = x^6$. Calculer $f'(x)$ puis $f'(-1)$ $\quad f'(x) = 6x^5$ donc $f'(-1) = -6$
- Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ au point A d'abscisse 0,5.

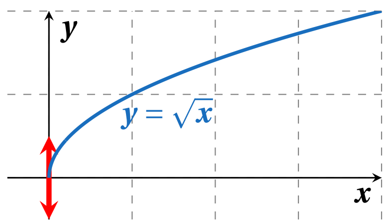
  On a $f(0{,}5) = 2$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ puis $f'(0{,}5) = -\dfrac{1}{0{,}5^2} = -4$.

  Ainsi, l'équation est de la forme $y = f'(0{,}5)(x - 0{,}5) + f(0{,}5)$ soit $y = -4(x - 0{,}5) + 2$

Le nombre dérivé en un réel a n'existe pas toujours.

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$ n'est pas dérivable en 0.

En effet la tangente en 0 n'a pas de coefficient directeur, elle est verticale.



2. Opérations et dérivation

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La dérivée de la somme est la somme des dérivées : $\quad \boldsymbol{(u+v)' = u' + v'}$
- La dérivée du produit par un réel est le produit du réel par la dérivée : $\quad \boldsymbol{(\lambda u)' = \lambda (u')}$

Exemples :

- Soit f telle que $f(x) = 3x^4$ $\quad f'(x) = 3 \times 4x^3 = 12x^3$
- Soit g telle que $g(x) = 5x^3 + 12x^2 - 7x + 3$ $\quad g'(x) = 5 \times 3x^2 + 12 \times 2x - 7 = 15x^2 + 24x - 7$
- Soit h telle que $h(x) = \dfrac{10}{x}$ $\quad h'(x) = 10 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{10}{x^2}$

Savoir-faire : Nombre dérivé et tangentes

Exemple 1 : Déterminer un nombre dérivé à l'aide des formules du cours

Soient f, g et h les fonctions définies par : $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Déterminer, s'ils existent, $f'(3)$, $g'(-2)$ et $h'(9)$.

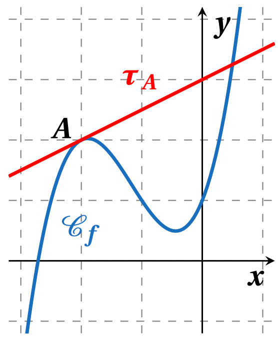
....

....

....

Exemple 2 : Lire graphiquement un nombre dérivé

Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique.
La droite τ_A est tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.



Déterminer graphiquement $f'(-2)$.

....

....

Exemples 3 : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5$

....

....

....

....

2) $g(x) = \sqrt{x} + x^5$

....

....

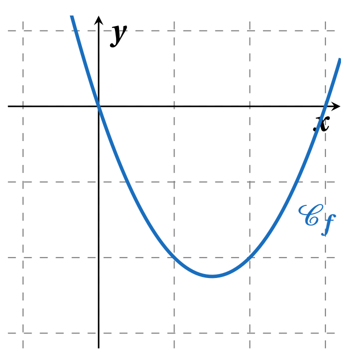
....

....

Exemple 4 : Déterminer l'équation réduite d'une tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



....

....

....

....

....

....

....

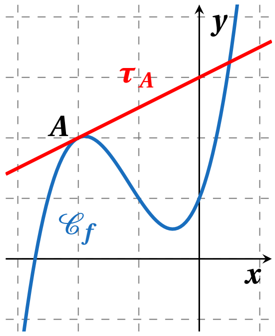
....

....

Corrections : Nombre dérivé et tangentes

Exemple 1 : Déterminer un nombre dérivé à l'aide d'un taux d'accroissement

- $f'(x) = 2x$ Ainsi, $f'(3) = 2 \times 3 = 6$.
- $g'(x) = 3x^2$ Ainsi, $g'(-2) = 3 \times (-2)^2 = 12$.
- $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ Ainsi, $h'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$.



Exemple 2 : Lire graphiquement un nombre dérivé

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de τ_A. Graphiquement, on a $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$.

(À partir du point A, on avance de deux unités vers la droite puis on monte d'une unité pour revenir sur la courbe...)

Exemples 3 : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

- On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, ...).
- On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité.
- On dérive séparément chacune des fonctions composant f.
- On calcule $f'(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

1. f est de la forme $u + v + w$ (somme) avec $u(x) = 7x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $w(x) = 5$.

Ces trois fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.

De plus, $u'(x) = 7 \times (3x^2) = 21x^2$, $v'(x) = -2 \times (2x) = -4x$ et $w'(x) = 0$. Ainsi :

$$f'(x) = 21x^2 - 4x.$$

2. $g : x \mapsto \sqrt{x} + x^5$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. g est de la forme $u + v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^5$. Ainsi :

$$g'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4.$$

Exemple 4 : Déterminer l'équation réduite d'une tangente

1. On détermine $f'(x)$.

2. Si f est dérivable en 1, la tangente a alors pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

3. On calcule donc $f'1)$ et $f(1)$.

f est de la forme $u + v$ (somme) avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = -3x$.

Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.

De plus, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -3$ Ainsi, pour tout réel x : $f'(x) = 2x - 3$

$f'(1) = 2 \times 1 - 3 = -1$ et $f(1) = 1^2 - 3 \times 1 = -2$

Ainsi, la tangente cherchée a pour équation :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -(x-1) - 2$

$y = -x + 1 - 2$

$y = -x - 1$