Cours : Les suites récurrentes

Parcours 3 : Comment résoudre une équation ?

Rappel : Ces suites sont définies par leur(s) premier(s) terme(s) et une relation de récurrence qui peut être de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f désigne une fonction.

Elles sont utiles pour approcher la solution d'une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement.

I. Représentation graphique d'une suite récurrente

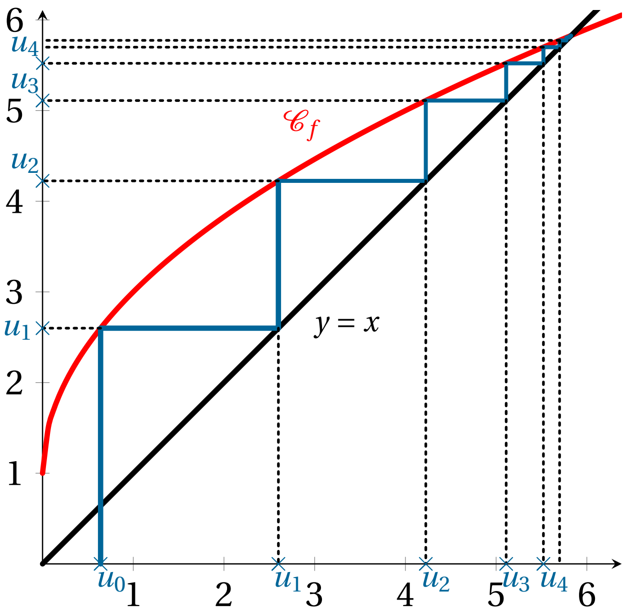
Soit la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0{,}64 \\ u_{n+1} = 1 + 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

Pour représenter les termes de cette suite, on va tracer dans un repère :

- la droite D d'équation $y = x$ qui va servir à passer d'une valeur de l'axe des ordonnées à la même valeur sur l'axe des abscisses.
- la courbe C_f d'équation $y = f(x)$ où f est la fonction définie par $x \longmapsto 1 + 2\sqrt{x}$

Pour représenter les premiers termes de la suite :

1. on place sur l'axe des abscisses le point d'abscisse u_0 ;
2. on place sur la courbe C_f le point M_1 d'abscisse u_0 ; son ordonnée est $u_1 = f(u_0)$;
3. on se sert de la droite D pour placer la valeur u_1 sur l'axe des abscisses ;
4. on réitère la démarche avec u_1 puis u_2...



La lecture graphique donne des valeurs approchées des u_n peu précises, mais suffisantes pour émettre des conjectures concernant le comportement global de la suite. Celle-ci semble être croissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection de C_f et D.

n	u_n
0	0,64
1	2,6
2	4,2249
3	5,1109
4	5,5215
5	5,6996
6	5,7748
7	5,8061
8	5,8192
9	5,8246
10	5,8268
11	5,8278

II. Comportement d'une suite récurrente

1. Variation

Dans le cas d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ et celui de la suite ne sont pas nécessairement les mêmes. Cependant, la connaissance du sens de variation de f sur un intervalle I contenant les termes de la suite peut aider à déterminer celui de la suite (u_n).

Théorème 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. Si f est décroissante sur I, la suite (u_n) n'est pas monotone.
2. Si f est croissante sur I, la suite (u_n) est monotone.

Remarque : Ce théorème ne permettant pas de connaitre les variations d'une suite, on fera une conjecture grâce aux calculs (ou dessin) des premiers termes et on démontrera cette conjecture par récurrence.

2. Suites majorées, minorées, bornées

Définition :

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

1. Dire que (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leqslant u_n$.

   On dit que m est un minorant de la suite (u_n)
2. Dire que (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant M$.

   On dit que M est un majorant de la suite (u_n)
3. Dire que (u_n) est **bornée** signifie que (u_n) est minorée et majorée.

Exemple : Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 6$.

Démontrer que :

a) (u_n) est minorée par -3

Initialisation :

Hérédité :

Conclusion :

n	u_n
0	-3
1	5,4
2	7,08
3	7,416
4	7,4832
5	7,49664
6	7,499328

b) (u_n) est majorée par 7.5

Initialisation :

Hérédité :

Conclusion :

3. Suite convergente

Théorème 2 :

Toute suite convergente est bornée.

Contraposée du théorème 2 :

Toute suite non bornée est divergente.

Exemple : La suite $\left((-1)^n n\right)$ est non bornée, donc …

Remarque : La réciproque du théorème 2 est …

Théorème 3 :

1. Toute suite croissante et convergente vers ℓ est majorée par ℓ.
2. Toute suite décroissante et convergente vers ℓ est minorée par ℓ.

Théorème 4 : *Théorème de convergence monotone*

1. Toute suite croissante majorée converge.
2. Toute suite décroissante minorée converge.

Ce théorème ne nous permet pas de trouver la limite de la suite.

Exemple : La suite des records du 100m est décroissante, minorée par 0 donc …

Théorème 5 :

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$
2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$

Remarques :

D'après les théorèmes 4 et 5, il n'y a que deux possibilités pour une suite croissante :

- soit elle est majorée et alors elle converge ;
- soit elle n'est pas majorée et alors elle diverge vers $+\infty$.

Pour une suite décroissante et minorée (ou non minorée), on raisonne de façon analogue.

4. Limite d'une suite récurrente convergente

Théorème 6 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $\ell \in I$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 3 + \dfrac{1}{n+1}$ et la f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$ et f est …………………… sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots.$

Théorème 7 : *Un théorème du point fixe*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans I.

Soit (u_n) une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$.

Si (u_n) converge vers le réel $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque :

Autrement dit $f(\ell) = \ell$ mais attention !

L'équation peut avoir plusieurs solutions, alors que la **limite éventuelle est unique** !

Exemple : Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$.

On admet que (u_n) converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;\,3]$.

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Afin d'y voir plus clair, on peut calculer les premiers termes sur la calculatrice :

1 ; 1,5 ; 1,2 ; 1,36363636 ; 1,26923077 ; 1,3220339 ; 1,2929708 ; 1,3089172 ; 1,29931034 ...

Cette suite n'est pas monotone mais elle semble bien être convergente ce qui est admis.

On introduit donc la fonction f définie sur $[0\,;\,3]$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$. Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$.

f est l'inverse de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{3}$ qui est continue et qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,3]$. Donc f est **continue** sur $[0\,;\,3]$.

f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2} < 0$ sur $[0\,;\,3]$.

Donc f est **décroissante**.

Autrement dit, pour tout $x \in [0\,;\,3]$, $f(x) \in [0\,;\,3]$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de f'	$-$
Var de f	$3 \searrow 0$

Pour se placer dans les conditions de ce théorème de point fixe, on note $I = [0\,;\,3]$.

- f est continue sur I et pour $x \in I$, $f(x) \in I$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$
- (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$.

Donc, **d'après ce théorème de point fixe**, la limite ℓ de (u_n) ne peut être qu'un point fixe de f sur I.

☞ On résout donc l'équation : $f(x) = x \iff \dfrac{3}{x+1} = x \iff 3 = x(x+1) \iff x^2 + x - 3 = 0$

C'est une équation de second degré : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 13$

Il y a deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2\times 1} \notin I$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\times 1} \in I$

Ainsi, la limite de (u_n) ne peut être que x_2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2\times 1} \approx 1{,}30278$

Montrer par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

III. Exemple d'étude

Étudions la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0{,}1u_n^2 + 1$.

Afin d'y voir plus clair, on peut calculer les premiers termes sur la calculatrice :

3 ; 1,9 ; 1,361 ; 1,1852321 ; 1,14047751 ; 1,1300689 ; 1,12770557 ; 1,12717199 ; 1,12705167 ...

Cette suite semble décroissante et même convergente. Vers quelle valeur ? Comment le démontrer ?

Pour cela, on introduit donc la fonction f définie et **continue** sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}1x^2 + 1$. Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrons d'abord que (u_n) est une suite convergente :

• $u_0 = 3 \geq 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq 0$ ainsi, pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 0$. (u_n) est donc une suite **minorée**.

• Montrons ensuite que (u_n) est une suite décroissante :

Pour cela, il faudrait que la fonction f soit croissante (Théorème 1) mais hélas, ce n'est pas le cas sur $\mathbb{R}$.

En revanche, une étude du signe de la dérivée puis un tableau de variation de f donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
Var de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et on a déjà montré que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Démontrons par récurrence la propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ $P(n)$

Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = 1{,}9$, on a bien $u_0 \geq u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier naturel N fixé, on a $u_N \geq u_{N+1}$.

$u_N \geq u_{N+1} \geq 0$

$f(u_N) \geq f(u_{N+1})$ *(car f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc elle conserve l'ordre)*

$u_{N+1} \geq u_{N+2}$ Ainsi, $\mathscr{P}(N+1)$ est donc vraie si $\mathscr{P}(N)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

Autrement dit, la suite (u_n) est **décroissante**.

(u_n) est **décroissante** et **minorée** (par 0) donc elle converge. (Théorème de convergence monotone)

Recherche de points fixes :

- f est continue sur $I = [0\,;\,+\infty[$ et pour $x \in I$, $f(x) \in I$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$
- (u_n) converge vers un réel $\ell \in I$.

Donc, **d'après ce théorème de point fixe**, la limite ℓ de (u_n) ne peut être qu'un point fixe de f sur I.

On résout donc l'équation : $f(x) = x \iff 0{,}1x^2 + 1 = x \iff 0{,}1x^2 - x + 1 = 0$

C'est une équation de second degré : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 0{,}1 \times 1 = 0{,}6$

Il y a deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{0{,}6}}{2 \times 0{,}1} \approx 1{,}1270167$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{0{,}6}}{2 \times 0{,}1} \approx 8{,}873$

Puisque $u_0 = 3$ et que (u_n) est décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

La limite de (u_n) ne peut donc pas être x_2, c'est donc x_1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{-(-1) - \sqrt{0{,}6}}{2 \times 0{,}1}$