Cours : Limites de fonctions

Parcours 3 : Comment résoudre une équation ?

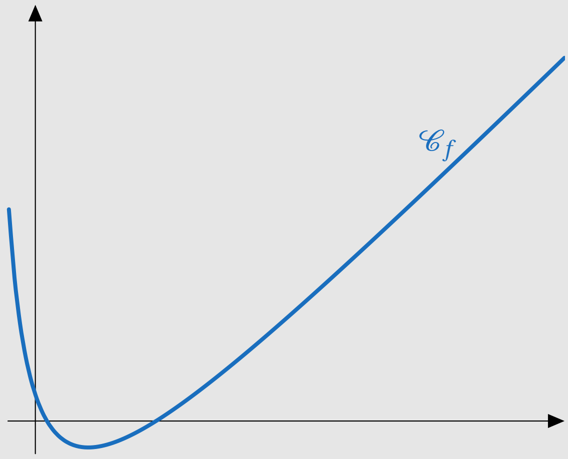
I. Définitions

1. Limite en $+\infty$

Définition : *Limite égale à $+\infty$*

Dire que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A > 0$ contient tous les réels $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de $+\infty$.

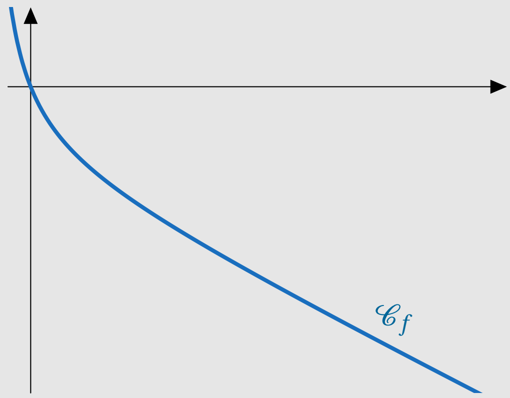
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Définition : *Limite égale à $-\infty$*

Dire que la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ avec $A < 0$ contient tous les réels $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de $+\infty$.

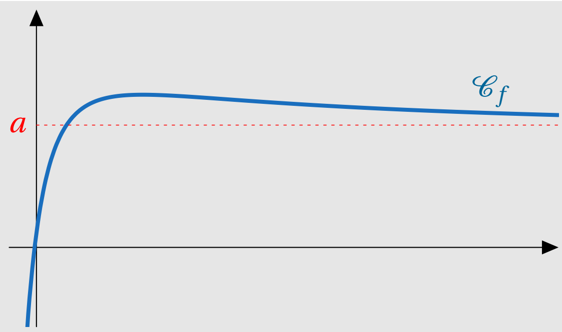
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



Définition : *Limite finie*

Dire que la limite de f en $+\infty$ est ℓ signifie que tout intervalle de la forme $[\ell - h; \ell + h[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

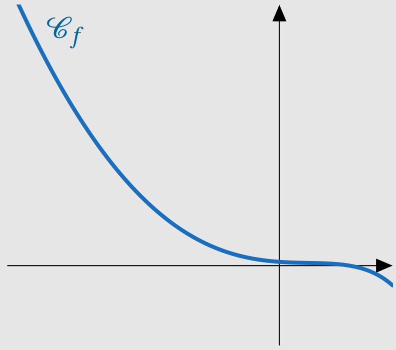


2. Limite en $-\infty$

Définition : *Limite égale à $+\infty$*

Dire que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ avec $A>0$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de $-\infty$.

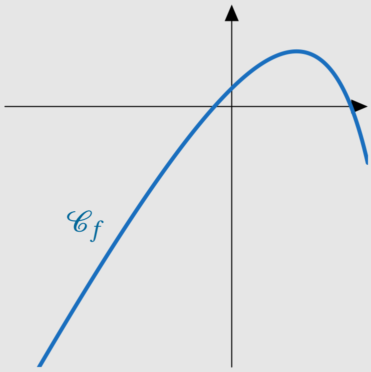
On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



Définition : *Limite égale à $-\infty$*

Dire que la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ avec $A<0$ contient tous les réels $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de $-\infty$.

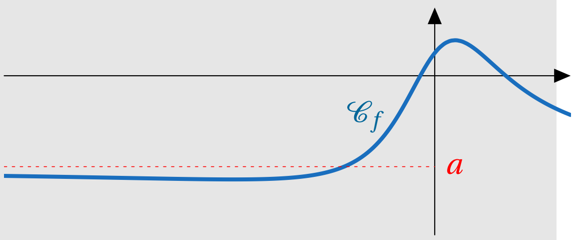
On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



Définition : *Limite finie*

Dire que la limite de f en $-\infty$ est ℓ signifie que tout intervalle de la forme $[\ell-h\,;\ell+h[$ contient tous les réels $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$

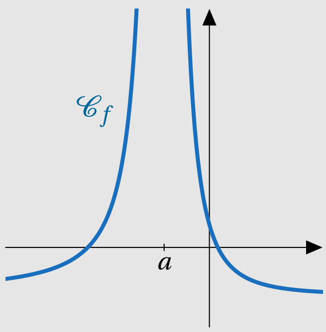


3. Limite en a

Définition : *Limite égale à $+\infty$*

Dire que la limite de f en a est $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ avec $A>0$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

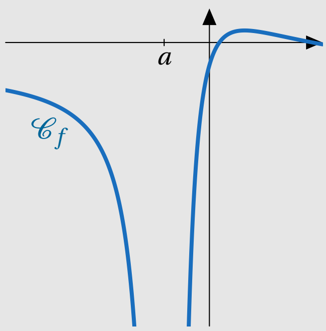
On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



Définition : *Limite égale à $-\infty$*

Dire que la limite de f en a est $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ avec $A<0$ contient tous les réels $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de a .

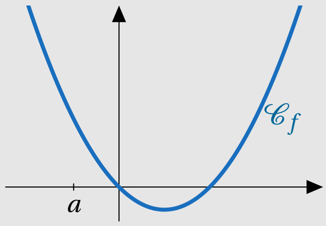
On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$



Définition : *Limite finie*

Dire que la limite de f en a est ℓ signifie que tout intervalle de la forme $[\ell - h ; \ell + h[$ contient tous les réels $f(x)$ dés que x est suffisamment proche de a .

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$



II. Exemples de limites

Vocabulaire :

La limite en a (avec $a \in \mathbb{R}$) d'une fonction f peut être différente à gauche et à droite.

- On parlera de **limite à gauche** pour signifier que x tend vers a en étant inférieur à a et on notera :

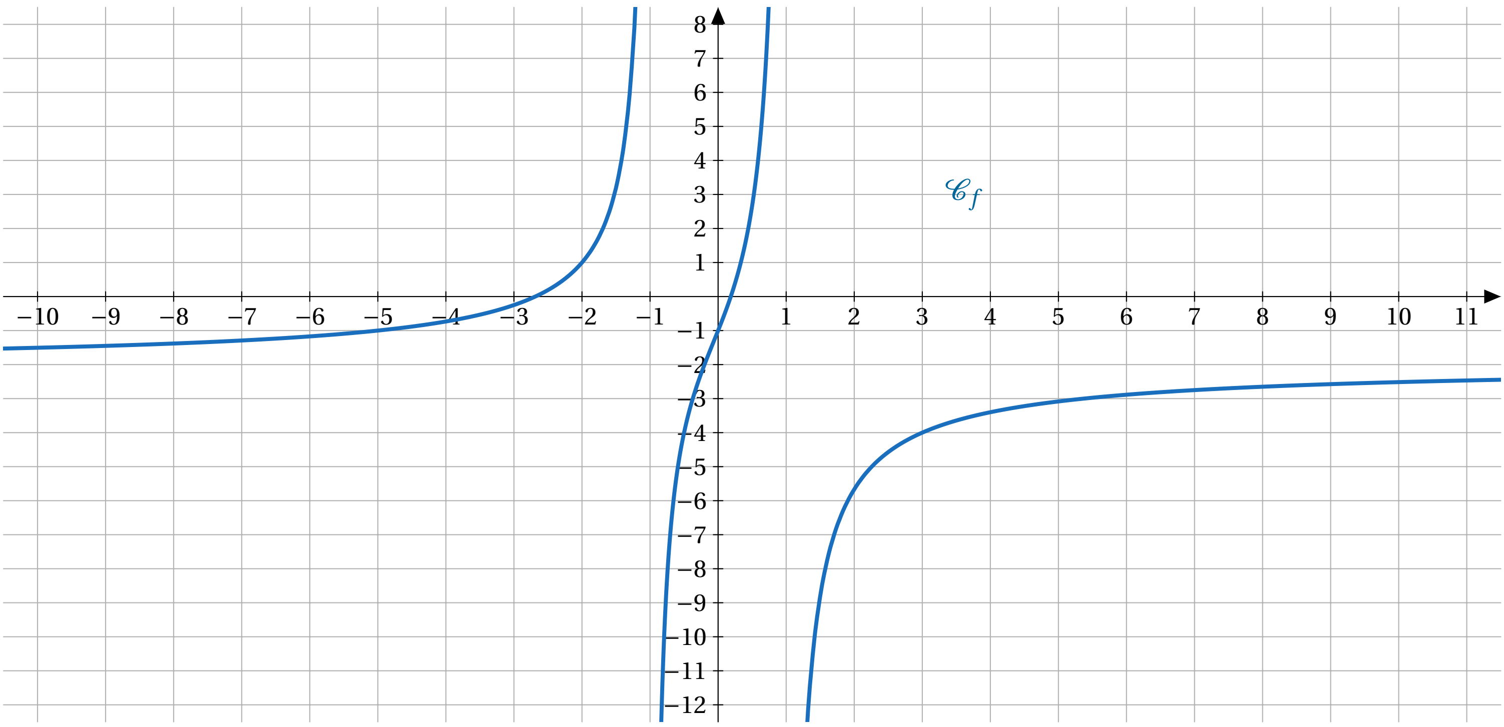
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

- On parlera de **limite à droite** pour signifier que x tend vers a en étant supérieur à a et on notera :

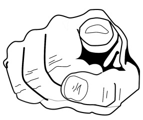
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Exemples :

Soit f une fonction définie sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 5x + 1}{(x+1)(x-1)}$



On peut lire sur le graphique ci-dessus que :



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

III. Calculs de limites

Dans tous les théorèmes de ce paragraphe, a,b, ℓ et ℓ' désignent des nombres réels. Les fonctions considérées sont définies au voisinage de α qui désigne un nombre réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.

1. Limite d'une somme

g \ f	a	$+\infty$	$-\infty$
b			
$+\infty$			
$-\infty$			

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-5 =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+2x-1 =$

2. Limite du produit $f \times g$

g \ f	$a>0$	$a<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$b>0$					
$b<0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-5)(x+1) =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x(x^2-4) =$

3. Limite du quotient $\dfrac{f}{g}$

g \ f	$a>0$	$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$b>0$					
$b<0$					
$+\infty$					
$-\infty$					
0^-					
0^+					

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-4}{5}\right) =$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-1}{x^3-8}\right) =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+8}\right) =$
- $\lim\limits_{x\to4} \left(\dfrac{1}{x-4}\right) =$

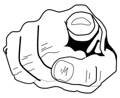
4. Limite d'une fonction composée

Théorème 6 :

Soient f et g deux fonctions.α désigne $+\infty$, $-\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} (g \circ f)(x) = \ell'$.

Exemple :



$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 5x - 1} = \ldots$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 + 5x - 1 = \\ \lim\limits_{X \to} \sqrt{X} = \end{cases}$

5. Limite et comparaison

Théorème 7 :

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α.

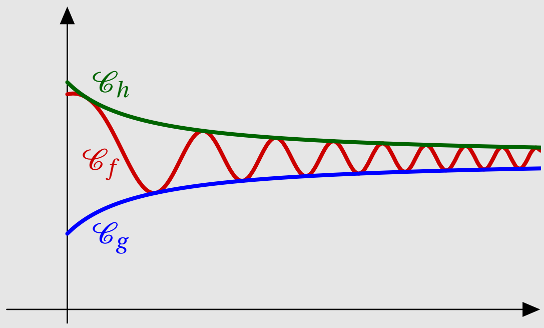
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) > g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) > g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$

Théorème 8 :

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α.

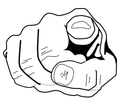
Si pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell$

alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$



6. Comment faire en cas de Forme Indéterminée ?

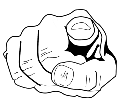
- La technique dite du poids pour le calcul des limites en $+\infty$ et $-\infty$.



Factorisation du terme de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 - 3x + 1 = \ldots$ car

- La technique de la quantité conjuguée :



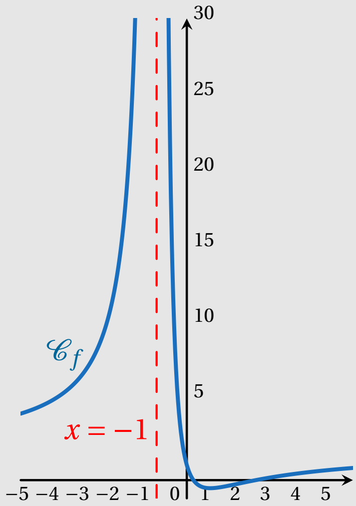
$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \ldots$ car

IV. Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, et on notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f .

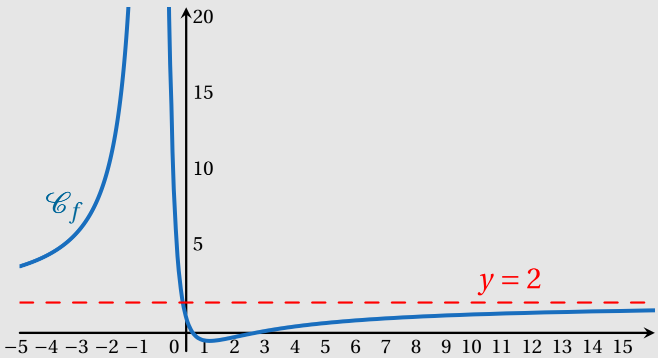
Définition :

Dire que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ signifie que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$)



Définition :

Dire que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$)



Remarques :

- La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \ell\right) = 0$
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, en étudiant le signe de $f(x) - \ell$, on peut déterminer la position de la courbe de f par rapport à son asymptote.