Cours : Dérivation et continuité des fonctions

I. Fonctions et compositions

Définition :

Une **fonction** f est un procédé qui à chaque valeur d'une variable réelle x fait correspondre au plus une **image** notée $f(x)$. *On devrait donc écrire* $f : x \longmapsto f(x)$, *mais on se contente souvent d'écrire* $f(x)$.

L'ensemble des réels qui ont une image par f est appelé le **domaine de définition** de f noté D_f.

Définition :

Soit g une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F (pour tout $x \in E$, $g(x) \in F$).

Soit f une fonction définie sur F.

On appelle **composée** de g suivie de f la fonction, notée $\boldsymbol{f o g}$, définie sur E par $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

$$x \xrightarrow{\quad f \circ g \quad} f \circ g(x)$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Exemple :

Soit g la fonction racine $g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$;

Soit f la fonction affine $f(x) = 2x - 10$ définie sur $\mathbb{R}$;

On peut enchaîner les fonctions g puis f et définir ainsi la composée de g suivie de f : $f \circ g$

	g		f	
$[0 ; +\infty[$	$\longmapsto$	$\mathbb{R}$	$\longmapsto$	$\mathbb{R}$
9	$\longmapsto$		$\longmapsto$	
20.25	$\longmapsto$		$\longmapsto$	
100	$\longmapsto$		$\longmapsto$	
x	$\longmapsto$		$\longmapsto$	

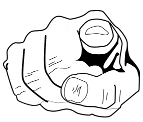
Remarque :

En général, la composée de g suivie de f n'est pas égale à la composée de f suivie de g.

Dans l'exemple précédent, l'image de 4 par $f \circ g$ est : $f[g(4)] = f(2) = -6$.

Mais on ne peut pas définir l'image de 4 par $g \circ f$: $f(4) = -2$ mais $g(-2)$ n'existe pas.

Exercice :



- $f(x) = 5x + 2$ $\qquad f \circ g(x) = \ldots$
- $g(x) = x^2 + 1$ $\qquad g \circ f(x) = \ldots$

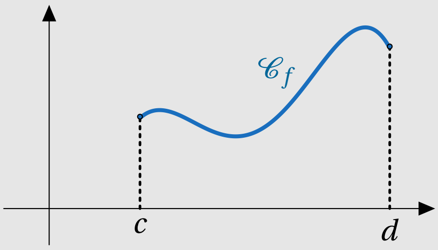
II. Continuité

1. Définition

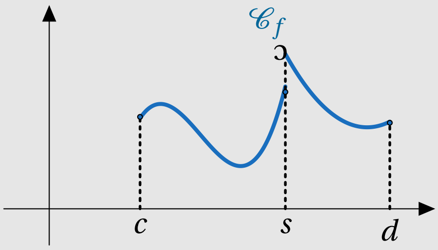
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0.

1. On dit que f est **continue en** x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. On dit que f est **continue sur** l'intervalle I lorsque f est continue en tout réel x de I.



Fonction continue sur $[c\,;d]$



Fonction non continue en s.

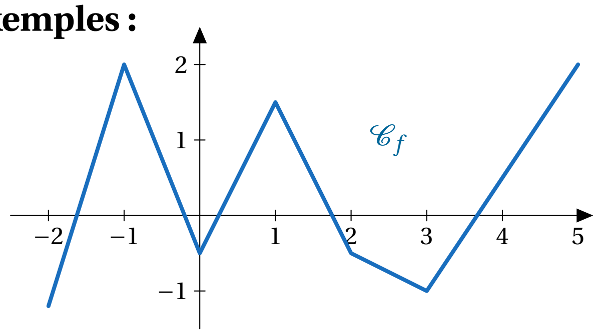
$f(s) = \lim\limits_{x \to s^-} f(x)$ mais $f(s) \neq \lim\limits_{x \to s^+} f(x)$

Remarque : Dans le tableau de variation d'une fonction, une flèche symbolisera le sens de variation **et** la continuité de la fonction sur un intervalle.

Théorème 1 :

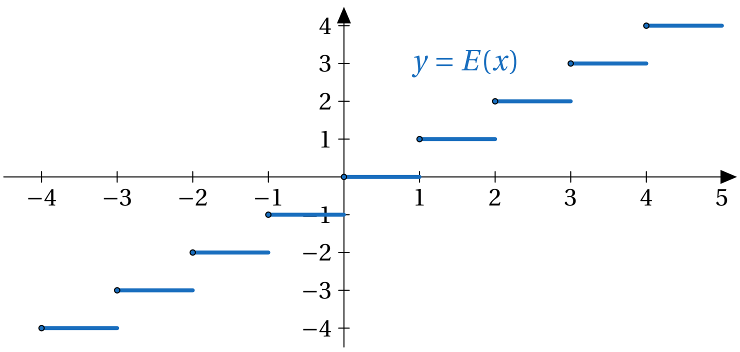
1. Les fonctions polynômes, racine carrée, inverses sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
2. Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues.
3. Toute fonction dérivable sur I est continue sur I. ⚠ La réciproque est fausse !

Exemples :



Fonction continue sur $[-2\,;6]$

mais non dérivable en $-1, 0, 1, 2,$ et 3

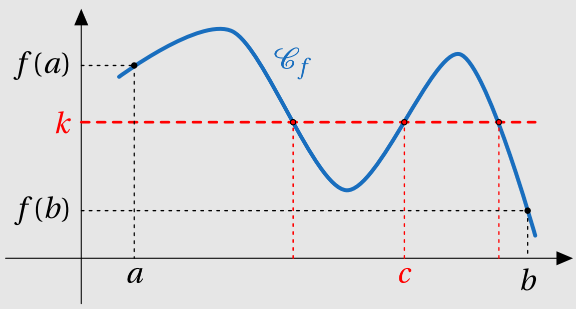


Fonction partie entière, non continue sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 : *Théorème des valeurs intermédiaires : TVI*

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $c \in [a\,; b]$ tel que $f(c) = k$.



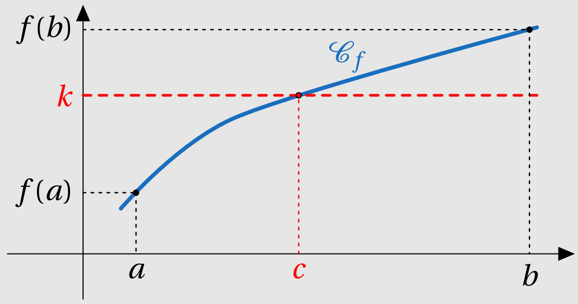
Remarque :

L'intervalle I peut être de la forme $[a;b]$, $[a;+\infty[$, $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;+\infty[$.

On remplacera alors $f(a)$ (respectivement $f(b)$) par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (respectivement $\lim\limits_{x\to b} f(x)$).

Cas particulier : *"Corollaire du TVI" ou "Théorème de la bijection"*

Si f est continue et strictement monotone sur I alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c)=k$.



III. Dérivation

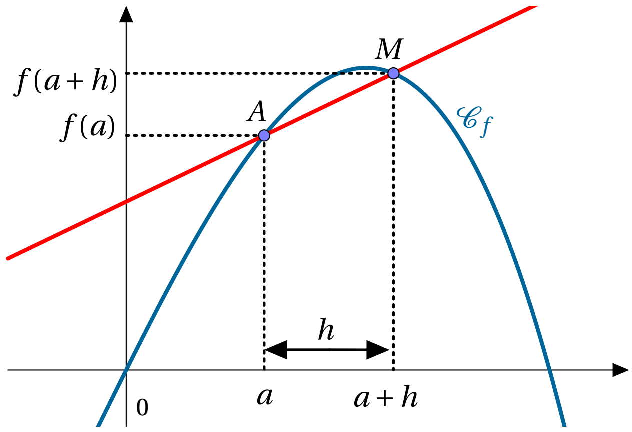
1. Nombre dérivé et fonction dérivée

Définition :

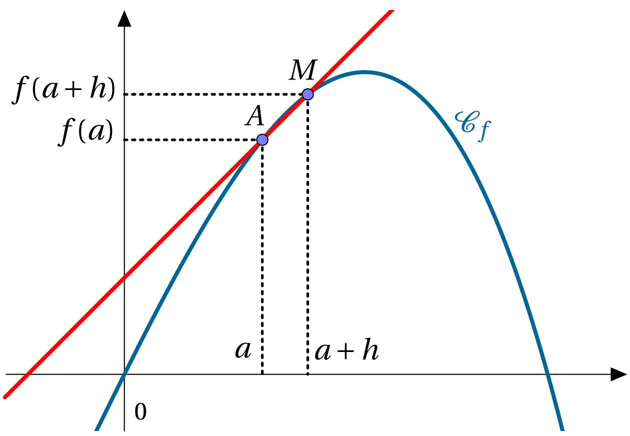
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel quelconque de I.
On dit que f est **dérivable en** a ou que f admet un **nombre dérivé** en a, si la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite ℓ en 0. Le nombre ℓ est le **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$.

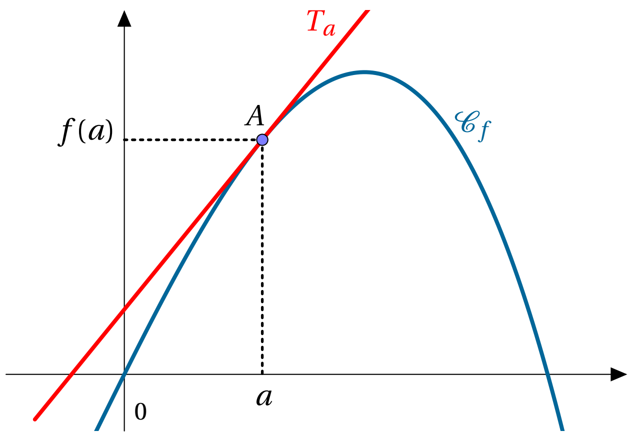
Graphiques :

Le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le **coefficient directeur de la sécante (AM)**.



Quand on fait tendre h vers 0, on rapproche la sécante de la **tangente** recherchée en A.





On dit que la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ est la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A**.

Une équation de cette **tangente** est donc : $\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$

Tableau des dérivées usuelles :

Intervalle de dérivabilité	Fonction : $x \mapsto f(x) =$	Fonction dérivée : $x \mapsto f'(x) =$
$\mathbb{R}$	k, constante	
$\mathbb{R}$	$mx+p$	
$\mathbb{R}$	x^2	
$\mathbb{R}$	x^n, avec $n \in \mathbb{N}$	
$]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	
$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	

Propriété 3 :

Toute fonction **polynomiale** est **continue** et **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4 : *Formules de calculs de dérivées*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$).
Alors $u+v$ et $u \times v$ sont dérivables. Si $v \neq 0$ alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables aussi.

f	$u+v$	$u \times v$	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$
f'				

2. Des formules complémentaires

Il nous manque des formules pour pouvoir calculer la dérivée de toutes les fonctions composées.

Théorème 5 : *Dérivée de $x \mapsto f(x) = u(ax+b)$*

Soit u une fonction définie, dérivable sur un intervalle I, a et b des réels.

La fonction f définie sur I par $f(x) = u(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = a \times u'(ax+b)$.

Théorème 6 : *Dérivée de $x \mapsto f(x) = \sqrt{u(x)}$*

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction f définie pour tout $x \in I$ par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Théorème 7 : *Dérivée de $x \mapsto f(x) = u(x)^n$*

Soit u une fonction définie, dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

La fonction f définie sur I par $f(x) = u(x)^n$ est dérivable sur I

et pour tout $x \in I$, $f'(x) = n \times u(x)^{n-1} \times u'(x)$.

Théorème 8 : *Cas général : Dérivée de $x \mapsto (g \circ f)(x)$*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que pour tout $x \in I$ alors $f(x) \in J$.

La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

Exemples :

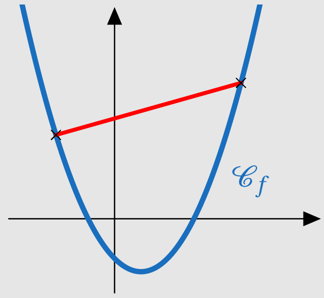
- $f(x) = \sqrt{5x+2}$ $\qquad f'(x) = \ldots$
- $f(x) = (5x+2)^4$ $\qquad f'(x) = \ldots$

IV. Convexité

Définition :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On dit que f est **convexe** sur I lorsque $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection (corde).



Remarque : On dit que f est **concave** sur I lorsque $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Théorème 9 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux fois dérivable sur I.

Si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I.

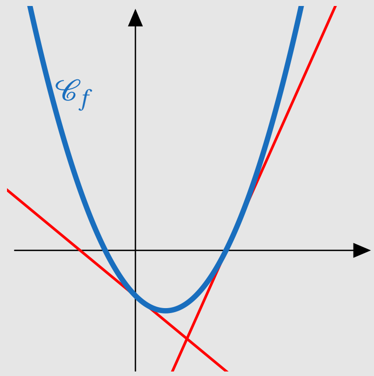
Théorème 10 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux fois dérivable sur I.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

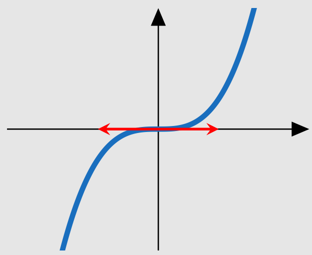
Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I ;
2. $\mathscr{C}_f$ est entièrement située au-dessus de ses tangentes ;
3. f' est croissante sur I ;
4. f'' est positive sur I.



Définition :

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.



Remarque : Lorsque la courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion, la fonction change de convexité : une fonction convexe devient concave ou inversement en ce point.