Série 2 : Droites

Exercice 1

Tracer dans le repère ci-dessous les ensembles de points suivants et préciser leur équation :

1) $\mathscr{E}_1$: ensemble des points dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

   Équation : ....

2) $\mathscr{E}_2$: ensemble des points dont l'abscisse vaut 2.

   Équation : ....

3) $\mathscr{E}_3$: ensemble des points dont l'ordonnée vaut -3.

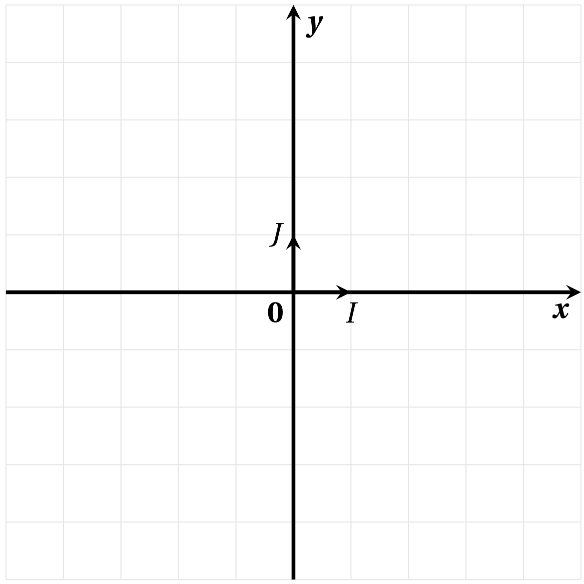
   Équation : ....

4) $\mathscr{E}_4$: ensemble des points dont l'abscisse ajouté au double de l'ordonnée vaut 0.

   Équation : ....

5) $\mathscr{E}_5$: ensemble des points dont le carré de l'abscisse ajouté au carré de l'ordonnée vaut 16.

   Équation : ....



Corrigé

Tracer dans le repère ci-dessous les ensembles de points suivants et préciser leur équation :

1) $\mathscr{E}_1$: ensemble des points dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

   Équation : $y = x$

2) $\mathscr{E}_2$: ensemble des points dont l'abscisse vaut 2.

   Équation : $x = 2$

3) $\mathscr{E}_3$: ensemble des points dont l'ordonnée vaut -3.

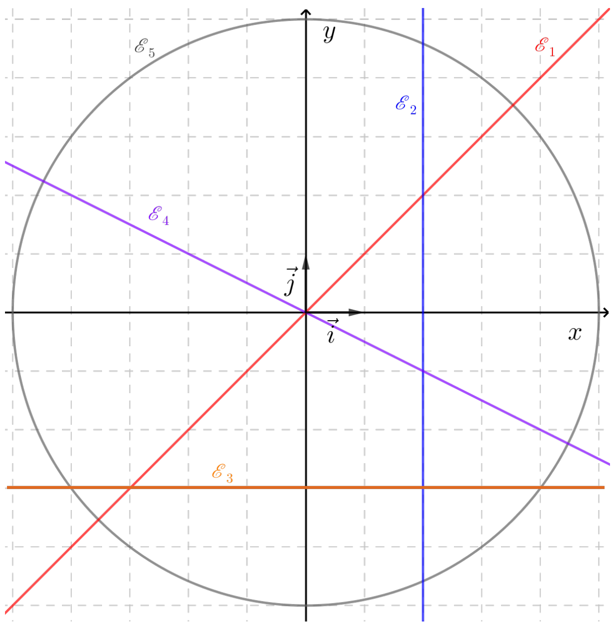
   Équation : $y = -3$

4) $\mathscr{E}_4$: ensemble des points dont l'abscisse ajouté au double de l'ordonnée vaut 0.

   Équation : $x + 2y = 0$

5) $\mathscr{E}_5$: ensemble des points dont le carré de l'abscisse ajouté au carré de l'ordonnée vaut 25.

   Équation : $x^2 + y^2 = 25$



Exercice 2

On donne les points suivants : $A(2\,;-1)$, $B(4\,;2)$, $C(-1\,;0)$ et $D(1\,;3)$.

1) Déterminer une équation des deux droites (AB) et (CD).

2) Étudier la position relative de ces deux droites (sécantes ? parallèles ? confondues ?)

Corrigé

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.

1) La droite d a pour équation cartésienne $3x+2y-6=0$.

   Quelle est l'abscisse du point A de d qui a pour ordonnée 3 ?

2) Le point $B(3;-1)$ appartient-il à d ?

Corrigé

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) La droite d a pour équation cartésienne $3x+2y-6=0$.

   Quelle est l'abscisse du point A de d qui a pour ordonnée 3 ?

   On cherche donc la valeur de x pour que le point $A(x;3)$ appartienne à d :

$$\begin{aligned} 3x+2\times 3-6 &= 0\\ 3x &= 0\\ x &= 0 \end{aligned}$$

   Il n'y a donc qu'une seule possibilité, l'abscisse du point A est 0.

2) Le point $B(3;-1)$ appartient-il à d ?

   Le point B appartient à d **ssi** les coordonnées de B vérifient l'équation de d :

   $3\times 3+2\times(-1)-6=9-2-6=1\neq 0$ Donc B n'appartient pas à d.

Exercice 4

La droite (d) a pour équation $2x-3y+5=0$.

1) Donner un vecteur directeur.

2) Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite (d) ? et son coefficient directeur ?

3) Quelle est l'abscisse du point de (d) d'ordonnée $\frac{3}{2}$?

4) Quelle est l'ordonnée du point de (d) d'abscisse -1 ?

Corrigé

La droite (d) a pour équation $2x-3y+5=0$.

1) Donner un vecteur directeur. On a une équation cartésienne de droite :

   $ax+by+c=0$ avec $a=2$, $b=-3$ et $c=5$.

   D'après le théorème du cours, $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$

2) Quelle est son ordonnée à l'origine ?

Soit on se ramène à une équation réduite de la forme $y = mx + p$, soit on détermine l'ordonnée du point de (d) qui a pour abscisse 0 :

$$\begin{aligned} 2\times 0-3y+5 &= 0 \\ -3y &= -5 \\ y &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de (d) est donc $\frac{5}{3}$.

3) Donner son coefficient directeur.

Plusieurs méthodes. On va ici se ramener à l'équation réduite :

$$\begin{aligned} 2x-3y+5 &= 0 \\ -3y &= -2x-5 \\ y &= \frac{-2x-5}{-3} \\ y &= \frac{-2x}{-3}+\frac{-5}{-3} \\ y &= \frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Le coefficient directeur de (d) est donc $\frac{2}{3}$ et on retrouve l'ordonnée à l'origine de (d) $\frac{5}{3}$.

4) Quelle est l'abscisse du point de (d) d'ordonnée $\frac{3}{2}$?

On remplace donc y par $\frac{3}{2}$ dans une des deux équations de (d) :

$$\begin{aligned} 2x-3\times\frac{3}{2}+5 &= 0 \\ 2x-\frac{9}{2}+\frac{10}{2} &= 0 \\ 2x+\frac{1}{2} &= 0 \\ 2x &= -\frac{1}{2} \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

L'abscisse du point de (d) d'ordonnée $\frac{3}{2}$ est donc $-\frac{1}{4}$.

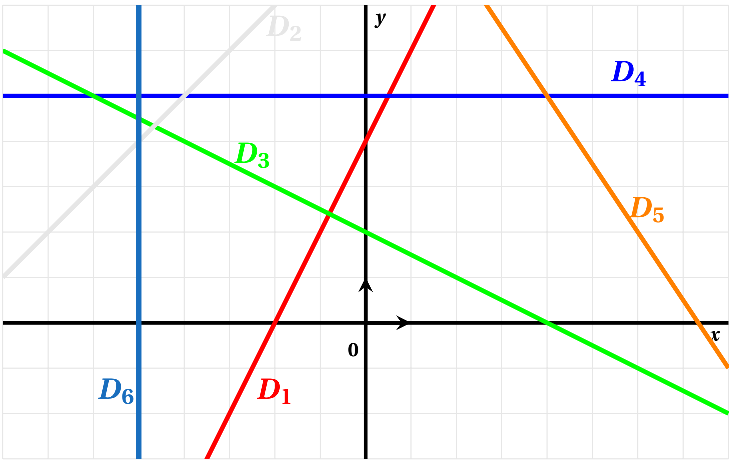
5) Quelle est l'ordonnée du point de (d) d'abscisse -1 ?

Le plus simple est de prendre l'équation réduite de (d) :

$y = \frac{2}{3}\times(-1)+\frac{5}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{5}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

L'ordonnée du point de (d) d'abscisse -1 est donc 1. *(On peut le vérifier facilement dans l'équation cartésienne de (d).)*

Exercice 5



Droite	Vecteur directeur	Équation
D_1		
D_2		
D_3		
D_4		
D_5		
D_6		

Corrigé

Droite	Vecteur directeur	Équation
D_1	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$2x-y+4=0$
D_2	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$x-y+9=0$
D_3	$\begin{pmatrix}1\\-0.5\end{pmatrix}$	$-\frac{1}{2}x-y+2=0$

Droite	Vecteur directeur	Équation
D_4	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$0x-y+5=0$
D_5	$\begin{pmatrix}1\\-1.5\end{pmatrix}$	$-\frac{3}{2}x-y+11=0$
D_6	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$x-0y+5=0$

Exercice 6

1) Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par le point $A(-1\,;\,4)$ et parallèle à la droite (d) d'équation : $3x-2y+1=0$.
2) Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par le point $A(-3\,;\,5)$ et parallèle à la droite (d) d'équation $y=\frac{2}{3}x-3$.
3) Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par le point $C(3\,;\,2)$ et parallèle à la droite (d) définie par les points $A(-1\,;\,5)$ et $B(2\,;\,-2)$.

Corrigé

1) Trouver une équation de la droite (Δ) passant par le point $A(-1\,;\,4)$ et parallèle à la droite (d) d'équation : $3x-2y+1=0$.

Cherchons une équation cartésienne :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** à la droite (d) mais aussi de la droite (Δ) cherchée. Ainsi, une équation cartésienne de (Δ) est de la forme :

$3x-2y+c=0$

De plus, $A(-1\,;\,4)$ appartient à (Δ) donc :

$$\begin{aligned}3\times(-1)-2\times4+c &= 0\\ -3-8+c &= 0\\ c &= 11\end{aligned}$$

Ainsi, une équation cartésienne de (Δ) est : $3x-2y+11=0$.

2) Trouver une équation de la droite (Δ) passant par le point $A(-3\,;\,5)$ et parallèle à la droite (d) d'équation $y=\frac{2}{3}x-3$.

On a l'équation réduite de (d). (Δ) et (d) sont parallèles donc elles ont le même coefficient directeur : $\frac{2}{3}$.

L'équation réduite de (Δ) est donc : $y=\frac{2}{3}x+p$. Il reste à déterminer p à l'aide des coordonnées du point A :

$$\begin{aligned}5 &= \frac{2}{3}\times(-3)+p\\ 5 &= -2+p\\ 7 &= p\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation réduite de (Δ) est : $y=\frac{2}{3}x+7$.

3) Trouver une équation de la droite (Δ) passant par le point $C(3\,;\,2)$ et parallèle à la droite (d) définie par les points $A(-1\,;\,5)$ et $B(2\,;\,-2)$.

(Δ) et (d) sont parallèles donc elles ont le même coefficient directeur. Le coefficient directeur de (d) est donné par :

$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-5}{2-(-1)}=\frac{-7}{3}$.

L'équation réduite de (Δ) est donc : $y=\frac{-7}{3}x+p$. Il reste à déterminer p à l'aide des coordonnées du point C :

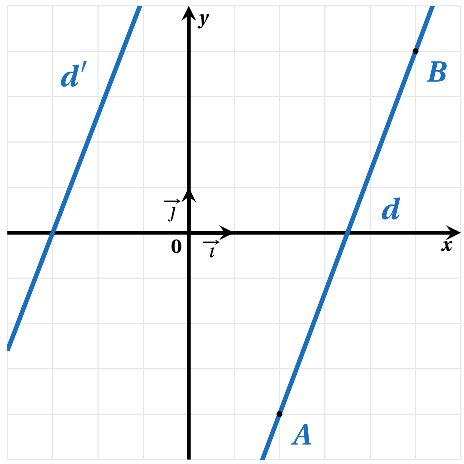
$$\begin{aligned}2 &= \frac{-7}{3}\times3+p\\ 2 &= -7+p\\ 9 &= p\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation réduite de (Δ) est : $y=\frac{-7}{3}x+9$.

On pourrait aussi chercher les coordonnées du vecteur (AB) directeur pour la droite (AB) mais aussi pour la droite $(Delta)$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.



1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) passant par

$$A(2\,;-4) \quad \text{et} \quad B(5\,;4)$$

2. La droite (d') a pour équation cartésienne $13\,x - 5\,y + 39 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées du point de (d') d'abscisse 0.

b) Les deux droites (d) et (d') ont-elles un point commun ?

Si oui, lequel ?

Corrigé

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). Ainsi, cette droite a pour équation : $8x - 3y + c = 0$.

$B(5\,;4)$ appartient à cette droite donc : $8 \times 5 - 3 \times 4 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -28$.

$(AB) : 8x - 3y - 28 = 0$.

2. **a)** Si $x = 0$ on a : $13x - 5y + 39 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 13 \times 0 - 5y + 39 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5y + 39 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 13 \times y = \dfrac{39}{5} = 7{,}8$.

Ce point a pour coordonnées : $(0\,;7{,}8)$.

b) $\vec{u} : \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d') et n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Donc les droites ne sont pas parallèles et ont un point d'intersection.

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} 8x - 3y - 28 = 0 \\ 13x - 5y + 39 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 3y - 28 = 0 \\ 2{,}6x + 7{,}8 = y \quad \text{On isole } y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 3(2{,}6x + 7{,}8) - 28 = 0 \quad \text{On remplace y par son expression en x} \\ 2{,}6x + 7{,}8 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2x - 51{,}4 = 0 \\ 2{,}6x + 7{,}8 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 257 \\ 2{,}6 \times 257 + 7{,}8 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 257 \\ y = 676 \end{cases}$$

Ce point d'intersection a pour coordonnées $(257\,;676)$.

Exercice 8

1) Déterminer une équation de la droite passant par le point $A\,(1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer une équation de la droite passant par le point $B\,(3\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Corrigé

1) Déterminer une équation de la droite passant par le point $A\,(1\,;2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow 3(x-1)-1(y-2)=0 \qquad \text{soit } 3x-1y-1=0\end{aligned}$$

On pouvait aussi utiliser le fait que 3 est le coefficient directeur de la droite et donc $y=3x+p$ avec $p=-1$ grâce aux coordonnées du point A.

2) Déterminer une équation de la droite passant par le point $B\,(3\,;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M \in (D) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{1}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow 1(x-3)+7y=0 \qquad \text{soit } x+7y-3=0\end{aligned}$$

Série 3 : Vecteurs et courbes

Exercice 9

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $K(4\,;\,1)$ et de rayon 5. Soit $A(0\,;\,4)$ un point de $\mathscr{C}$.

Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

Corrigé

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $K(4\,;\,1)$ et de rayon 5. Soit $A(0\,;\,4)$ un point de $\mathscr{C}$.

Ce cercle a pour équation $(x-4)^2+(y-1)^2=25$

A est bien sur ce cercle puisque $(x_A-4)^2+(y_A-1)^2=(0-4)^2+(4-1)^2=16+9=25$

Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

La droite recherchée passe par A et est perpendiculaire au rayon $[KA]$.

Elle a donc le vecteur $\overrightarrow{KA}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur normal Alors l'équation est du type $-4x+3y+c=0$

La droite recherchée passe par A donc $-4x_A+3y_A+c=0$ soit $-4\times 0+3\times 4+c=0$ donc $c=-12$

La tangente recherchée a donc pour équation $-4x+3y-12=0$

Exercice 10

1) Déterminer une équation de la droite passant par le point $C\,(4\,;\,5)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x-y+4=0$.
2) Déterminer une équation de la droite passant par le point $D\,(-2\,;\,8)$ et parallèle à la droite d'équation $-3x+5y+2=0$.

Corrigé

1) Déterminer une équation de la droite passant par le point $C\,(4\,;\,5)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $2x-y+4=0$.

$M\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux avec $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vect. dir. de la droite $2x-y+4=0$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y-5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow 1(x-4)+2(y-5)=0$ soit $x+2y-14=0$

2) Déterminer une équation de la droite passant par le point $D\,(-2\,;\,8)$ et parallèle à la droite d'équation $-3x+5y+2=0$.

$M\in(D)\Leftrightarrow\ \overrightarrow{1}$ et $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ vect. dir. de la droite $-3x+5y+2=0$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{1}\begin{pmatrix}x+2\\y-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow -3(x+2)+5(y-8)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x+5y-46=0$$

Exercice 11

On donne le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2-6x-4y-4=0$ et la droite (d) d'équation $4x+y-31=0$.

1) Les points $A(7\,;3)$ et $B(-1\,;1)$ sont-ils des points du cercle $\mathscr{C}$?
2) La droite (d) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point A?
3) La tangente à $\mathscr{C}$ au point B est-elle parallèle à la droite (d) ?

Corrigé

On donne le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2-6x-4y-4=0$ et la droite (d) d'équation $4x+y-31=0$.

1) Les points $A(7\,;3)$ et $B(-1\,;1)$ sont-ils des points du cercle $\mathscr{C}$?

   Un point appartient à une courbe (ici cercle) si ses coordonnées vérifient l'équation de cette courbe. testons donc les coordonnées de A puis de B :

   Pour le point A : $7^2+3^2-6\times 7-4\times 3-4=49+9-42-12-4=0$ donc $A\in\mathscr{C}$

   Pour le point B : $(-1)^2+1^2-6\times(-1)-4\times 1-4=1+1+6-4-4=0$ donc $B\in\mathscr{C}$

2) La droite (d) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point A?

   (d) est tangente à $\mathscr{C}$ $\Leftrightarrow$ (d) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un seul point (qui sera le point de tangence).

   Intersection droite / cercle :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y-4=0 \\ 4x+y-31=0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-6x-4y-4=0 \\ y=31-4x=0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(31-4x)^2-6x-4(31-4x)-4=0 \\ y=31-4x \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 17x^2-238x+833=0 \\ y=31-4x \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=31-4x \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad x=7 \quad et \quad y=3
\end{aligned}$$

   La droite (d) est donc bien la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.

3) La tangente à $\mathscr{C}$ au point B est-elle parallèle à la droite (d) ?

La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en B est la droite passant par B et de vecteur normal le rayon du cercle passant par B.

Or $x^2+y^2-6x-4y-4=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=17$. $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre $\Omega(3\,;2)$

La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en B est la droite passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

On trouve donc la droite d'équation $4x+y+3=0$ qui est bien parallèle à la droite (d) puisqu'elle a le même vecteur normal (on peut aussi regarder leur coefficient directeur respectif).

Exercice 12

On appelle projeté orthogonal d'un point M sur une droite d le point d'intersection de la droite d avec la perpendiculaire à la droite d passant par M.
On considère la droite d d'équation $x-3y+3=0$ et le point A de coordonnées $(2\,;5)$. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite d.

1) Déterminer une équation de la perpendiculaire d_1 à d passant par A.
2) Calculer les coordonnées du point H.

Corrigé

On considère la droite d d'équation $x-3y+3=0$ et le point $A(2\,;5)$. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite d.

1) Déterminer une équation de la perpendiculaire d_1 à d passant par A

   (d_1) passe par A et a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ (vecteur directeur de (d))

   On a donc comme équation pour (d_1) : $3x+y-11=0$ ou $-3x-y+11=0$

2) Calculer les coordonnées du point H.

   $H=(d_1)\cap(d)$. Résolvons le système obtenue avec les deux équations de droites $\begin{cases} x-3y+3=0\\ 3x+y-11=0\end{cases}$

$$\begin{cases} x-3y+3=0\\ 3x+y-11=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-3\\ 3(3y-3)+y-11=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-3\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\\ y=2\end{cases}$$

Exercice 13 fac

Pour quelle valeur de m la droite (d) d'équation $mx-3y+2=0$ est-elle parallèle à la droite (Δ) d'équation $3x-2y+4=0$

Corrigé

1) Pour quelle valeur de m la droite (d) d'équation $mx-3y+2=0$ est-elle parallèle à la droite (Δ) d'équation $3x-2y+4=0$?

(d) d'équation $mx-3y+2=0$ a $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}3\\m\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur

(Δ) d'équation $3x-2y+4=0$ a $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur .

$(d) \parallel (\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{1}$ et $\overrightarrow{1}$ sont colinéaires $\quad \Leftrightarrow \quad 3\times 3-2\times m=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=\dfrac{9}{2}$

2) Les droites (d_1) et (d_2) ont respectivement pour équation : $3x-2y-8=0$ et $5x+4y-6=0$.

La droite (d_3) a pour équation $2mx-(m+1)y-8=0$.

Comment choisir le réel m pour que ces trois droites soient concourantes?

Les trois droites sont concourantes si elles ont un unique point d'intersection.

Cherchons le point d'intersection de (d_1) et (d_2) en résolvant le système : $\begin{cases}3x-2y-8=0\\5x+4y-6=0\end{cases}$

$$\begin{cases}3x-2y-8=0\\5x+4y-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}15x-10y-40=0\\15x+12y-18=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y-8=0\\y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$$

Regardons maintenant à quelle condition ce point appartient à la droite (d_3).

$M(2\,;-1)\in(d_3) \quad \Leftrightarrow \quad 2m\times 2-(m+1)\times(-1)-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4m+m+1-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=\dfrac{7}{5}$

Exercice 14 fac

Soit Δ la droite d'équation $y=2x+1$ et $A\,(-1\,;4)$. Soit $M\,(x\,;\,y)$ un point quelconque de Δ.

1) Déterminer AM^2 en fonction de x. Pour quelle valeur de x l'expression de AM^2 est-elle minimale?
2) Vérifier que l'abscisse trouvée à la question précédente correspond à celle du projeté orthogonal du point A sur Δ.

Corrigé

Soit Δ la droite d'équation $y=2x+1$ et $A\,(-1\,;4)$. Soit $M\,(x\,;\,y)$ un point quelconque de Δ.

1) Déterminer AM^2 en fonction de x. Pour quelle valeur de x l'expression de AM^2 est-elle minimale?

Avec $A\,(-1\,;4)$. Soit $M\,(x\,;\,y)$, et la formule de la longueur d'un segment, on obtient :

$AM^2=\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}\right)^2=(x+1)^2+(2x+1-4)^2=\ldots=5x^2-10x+10$

On cherche le minimum de l'expression $5x^2-10x+10$. Vous aurez évidemment reconnu une expression du second degré (parabole avec un minimum car $5>0$).

AM^2 est donc minimale pour $x=-\dfrac{b}{2a}=1$.

2) Vérifier que l’abscisse trouvée à la question précédente correspond à celle du projeté orthogonal du point A sur Δ.

On cherche le point d’"intersection de Δ avec sa perpendiculaire passant par A :

$\Delta : y = 2x + 1$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite perpendiculaire à Δ passant par A

$\Rightarrow$ cette perpendiculaire a donc pour équation $x + 2y - 7 = 0$

On cherche le point d’intersection de ces deux droites perpendiculaires en résolvant le système : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

On retrouve bien le point d’abscisse 1.

Série 4 : Géométrie

Exercice 15 fac

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, les points A, B et C ont pour coordonnées

$$(1\,;1),\ (3\,;4)\quad \text{et}\quad (3-k\,;-1) \text{ où } k \text{ est un réel}$$

·1) Déterminer k pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

2) Démontrer que le triangle est alors isocèle en A.

Corrigé

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, les points A, B et C ont pour coordonnées

$$(1\,;1),\ (3\,;4)\quad \text{et}\quad (3-k\,;-1) \text{ où } k \text{ est un réel}$$

.

1) ABC soit rectangle en A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-k\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow 2(2-k)+3(-2)=0\\ &\Leftrightarrow 4-2k-6=0\\ &\Leftrightarrow k=-1\end{aligned}$$

2) ABC soit isocèle en A $\Leftrightarrow$ $AB=AC$

Or $AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ et $AC=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

ABC est donc bien isocèle en A

Exercice 16 cercle circonscrit

Cercle passant par 3 points

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on donne les points $A\,(5\,;1)$, $B\,(-3\,;1)$ et $C\,(0\,;6)$.

On souhaite déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

1) **Première méthode :**

   a) Déterminer une équation des médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$.

   b) En déduire les coordonnées de Ω, centre du cercle recherché, ainsi que son rayon.

   c) Déterminer alors l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

2) **Deuxième méthode :**

   On sait que l'équation de ce cercle est du type : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

   On doit donc déterminer les valeurs des réels a, b et c.

a) Écrire un système de trois équations à trois inconnues (a, b et c).

b) Déterminer la valeur de a. En déduire les valeurs de b et de c.

c) Donner alors l'équation de $\mathscr{C}$.

d) Préciser les coordonnées de son centre et son rayon.

Corrigé

A faire

Exercice 17 arcs

Les arcs rampants sont des arcs (constitué de plusieurs arcs de cercles) dont les naissances sont placées à des hauteurs différentes.

Il sont fréquemment employés dans les frontons, les arcs-boutants et certaines voûtes d'escaliers.

Arc rampant à Pontoise

Arc rampant à l'ancien Tribunal de Poitiers

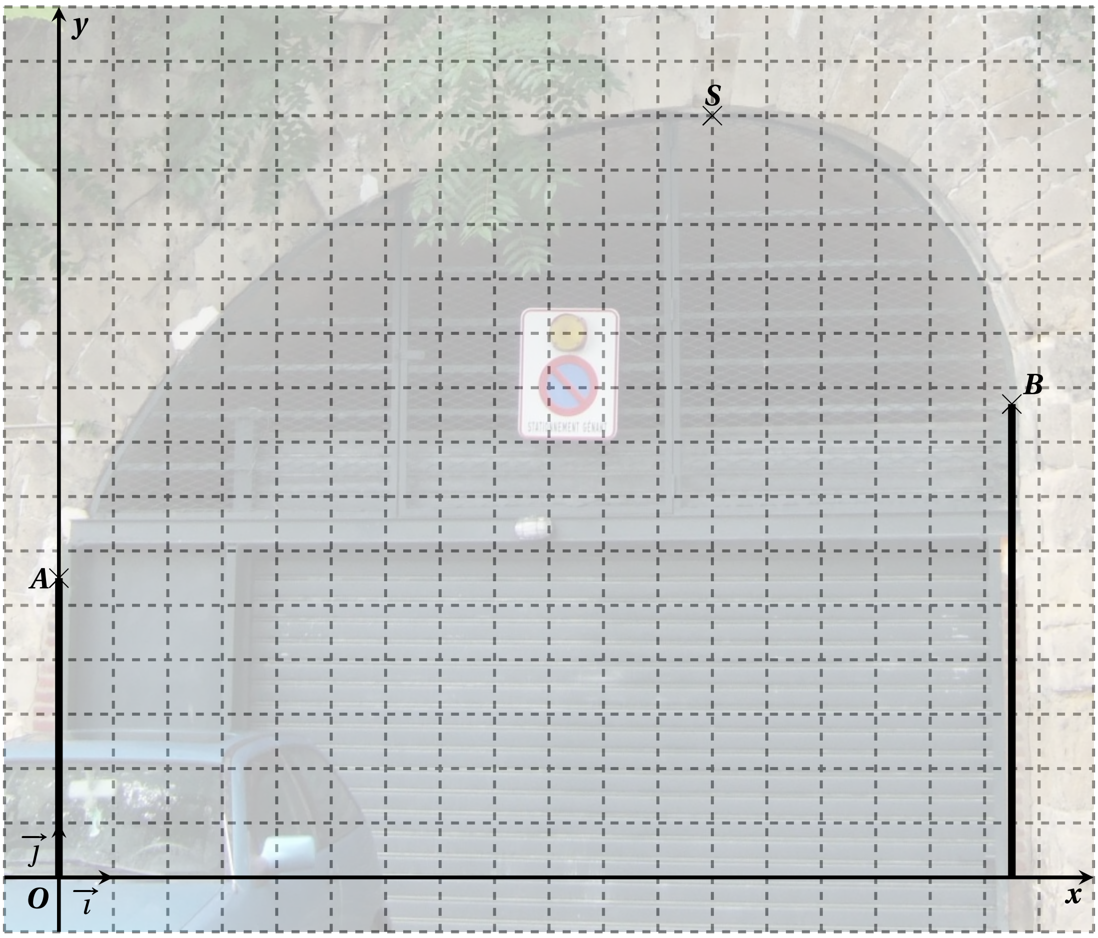
Arc rampant sous un escalier

Ici, il s'agit de joindre deux piliers n'ayant pas la même hauteur à l'aide de deux arcs de cercle.

Nous allons modéliser l'arc rampant de la voûte de parking à Pontoise.

Dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on donne $A\,(0\,;\,5{,}5)$, $B\,(17{,}5\,;\,8{,}7)$ et $S\,(12\,;\,14)$.

On souhaite qu'au niveau du point S de contact des deux arcs de cercle, **les tangentes soient horizontales**.

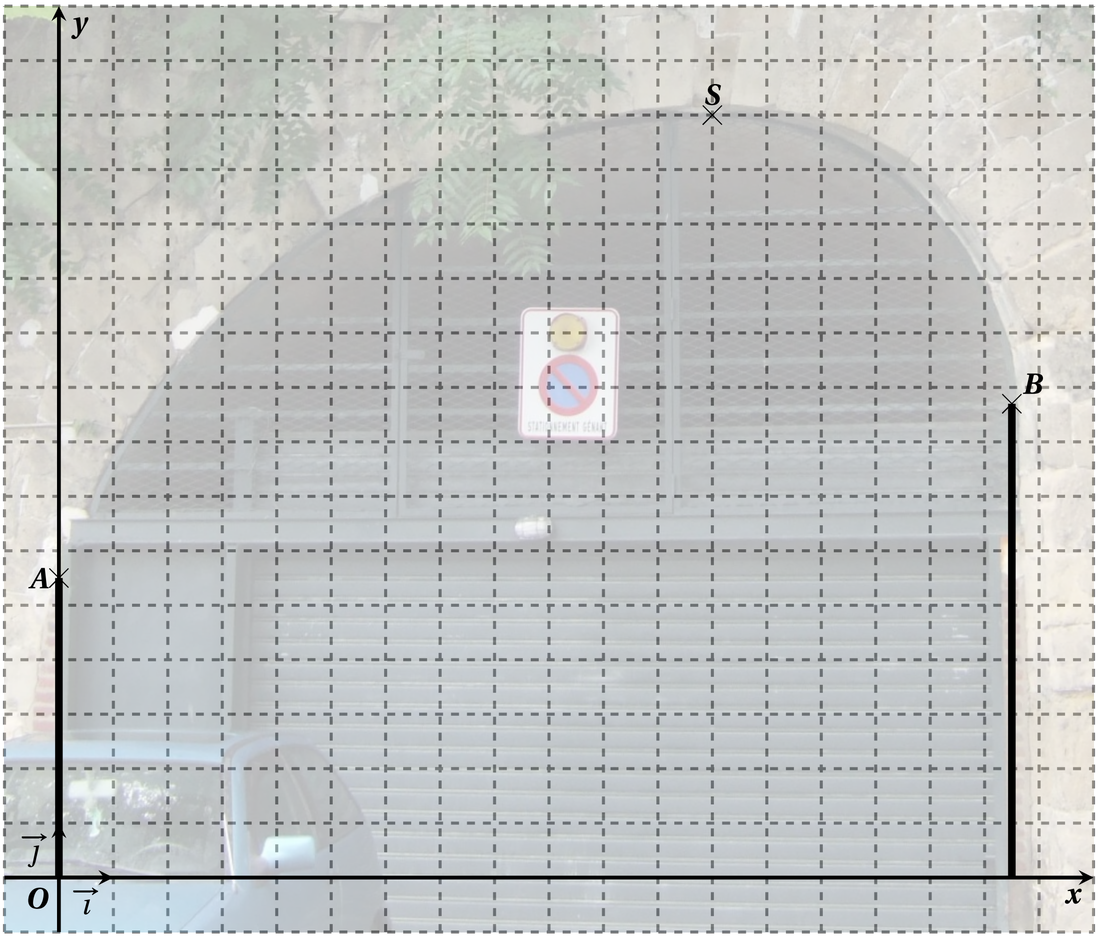


Comment déterminer les centres des deux arcs de cercles qui se rejoignent en S ainsi que leurs rayons ?

Corrigé

Dans le repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on donne $A\,(0\,;\,5{,}5)$, $B\,(17{,}5\,;\,8{,}7)$ et $S\,(12\,;\,14)$.

On souhaite qu'au niveau du point S de contact des deux arcs de cercle, **les tangentes soient horizontales**.



Le centre du cercle passant par A et S est

- sur la médiatrice de $[AS]$ $\qquad 12x+8.5y-154.875=0$
- sur la droite perpendiculaire à la tangente en S horizontale $\qquad x=12$

En effet : $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}12\\8.5\end{pmatrix}$ est un vecteur normale de la médiatrice de $[AS]$ et $M(6\,;\,9.75)$ est le milieu de $[AS]$

On a donc comme équation $12x+8.5y+c=0$ avec $12\times 6+8.5\times 9.75+c=0$ cad $c=-154.875$

Le centre du cercle passant par A et S est donc $C_1(12\,;\,10.875)$

Le centre du cercle passant par B et S est

- sur la médiatrice de $[BS]$ $\qquad -5.5x+5.3y+13.595=0$
- sur la droite perpendiculaire à la tangente en S horizontale $\qquad x=12$

En effet : $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}-5.5\\5.3\end{pmatrix}$ est un vecteur normale de la médiatrice de $[AS]$ et $N(14.75\,;\,11.35)$ est le milieu de $[BS]$

On a donc comme équation $-5.5x+5.3y+c=0$ avec $-5\times 14.75+5.3\times 11.35+c=0$ cad $c=13.595$

Le centre du cercle passant par A et S est donc $C_1(12\,;\,10.875)$