Corrections de la série 1 : Cercles

Exercice 1

1. Déterminer une équation du cercle de centre O et de rayon 3.

2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, où $A(-1\,;-2)$ et $B(3\,;-1)$.

Corrigé

1. Déterminer une équation du cercle de centre O et de rayon 3.

   Notons $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3 :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow OM^2 = 3^2 \\ &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, où $A(-1\,;-2)$ et $B(3\,;-1)$.

   Notons $\mathscr{C}$ le cercle de centre $[AB]$:

   Le centre de $\mathscr{C}$ est le point I milieu de $[AB]$ de coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ càd $I(1\,;-1{,}5)$

   Le rayon de $\mathscr{C}$ est $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{(3+1)^2+(-1+2)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

   $M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad IM^2 = \left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y+1{,}5)^2 = \dfrac{17}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+y^2+3y-1=0$

Exercice 2

Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(1\,;1)$ et $B(3\,;2)$.

Corrigé

Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(1\,;1)$ et $B(3\,;2)$.

Notons $\mathscr{C}$ le cercle de centre $[AB]$:

Le centre de $\mathscr{C}$ est le point I milieu de $[AB]$ de coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ càd $I(2\,;1{,}5)$

Le rayon de $\mathscr{C}$ est $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$M \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad IM^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(y-1{,}5)^2 = \dfrac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+y^2-3y+5=0$

Exercice 3

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $A(2;1)$ et $B(-4;-3)$.

2. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2+6x-2y+1=0$.

3. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2-4x+2y-5=0$.

Corrigé

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $A(2;1)$ et $B(-4;-3)$.

Notons $\mathscr{C}$ le cercle de centre $[AB]$:

Le centre de $\mathscr{C}$ est le point I milieu de $[AB]$ de coordonnées : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ càd $I(-1;-1)$

Le rayon de $\mathscr{C}$ est $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{(-4-2)^2+(-3-1)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{52}}{2}=\sqrt{13}$

$M\in\mathscr{C} \quad\Leftrightarrow\quad IM^2=\left(\sqrt{13}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2+(y+1)^2=13 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x+y^2+2y-11=0$

2. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2+6x-2y+1=0$.

La forme canonique de l'équation de cercle nous renseignera sur le centre et le rayon de ce cercle :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-2y+1=0 &\Leftrightarrow x^2+6x+y^2-2y+1=0\\ &\Leftrightarrow (x+3)^2-9+(y-1)^2-1+1=0\\ &\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=9 \end{aligned}$$

Le centre de $\mathscr{C}$ est donc le point $I(-3;1)$ et son rayon 3.

En effet, la forme canonique d'un cercle est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$

3. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2-4x+2y-5=0$.

La forme canonique de l'équation de cercle nous renseignera sur le centre et le rayon de ce cercle :

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+2y-5=0 &\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+2y-5=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1-5=0\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=10 \end{aligned}$$

Le centre de $\mathscr{C}$ est donc le point $I(2;-1)$ et son rayon $\sqrt{10}$.

En effet, la forme canonique d'un cercle est de la forme $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$

Exercice 4

1. Quel est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+4x+2y+15=0$?
2. Quel est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+2x-6y+12=0$?

Corrigé

1. Quel est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+4x+2y+15=0$?

Cherchons la forme canonique de cette équation :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x+2y+15=0 &\Leftrightarrow x^2+4x+y^2+2y+15=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y+1)^2-1+15=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=-10 \end{aligned}$$

On reconnait IM^2 avec $I(-2\,;-1)$.

Ceci voudrait dire que $IM^2 = -10$ avec $M(x;\, y) =$ et $I(-2\,;-1)$.

Cela n'est pas possible (longueur négative) donc l'ensemble des points vérifiant cette équation est vide.

En effet, la forme canonique d'un cercle est de la forme $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2$

2. Quel est l'ensemble des points $M\,(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 + 2\,x - 6\,y + 12 = 0$?

Cherchons la forme canonique de cette équation :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + y^2 - 6y + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-3)^2 = -2 \end{aligned}$$

Ceci voudrait dire que $IM^2 = -2$ avec $M(x;\, y) =$ et $I(-1\,;3)$. Cela n'est pas possible (longueur négative) donc l'ensemble des points vérifiant cette équation est vide.

Exercice 5

Déterminer les points d'intersection du cercle de centre $\Omega\,(10\,;\,12)$ et de rayon 20, avec les axes du repère.

Corrigé

Déterminer les points d'intersection du cercle de centre $\Omega\,(10\,;\,12)$ et de rayon 20, avec les axes du repère.

- Déterminons l'équation de ce cercle. L'application direct du cours nous donne $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 400$
- **Intersection avec l'axe des abscisses :**

  On cherche donc les points du cercle d'ordonnée égale à 0 donc tels que $(x-10)^2 + (0-12)^2 = 400$

  $(x-10)^2 + (0-12)^2 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 20x - 156 = 0$

  $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 1 \times (-156) = 1024 = 32^2$

  $x^2 - 20x - 156 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \dfrac{20-32}{2} = -6 \quad \text{ou} \quad x_2 = \dfrac{20+32}{2} = 26$

  les points d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses sont $A(-6\,;\,0)$ et $B(26\,;\,0)$
- **Intersection avec l'axe des ordonnées :**

  On cherche donc les points du cercle d'abscisse égale à 0 donc tels que $(0-10)^2 + (y-12)^2 = 400$

  $(0-10)^2 + (y-12)^2 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 24x - 156 = 0$

  $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 1 \times (-156) = 1200 = (20\sqrt{3})^2$

  $y^2 - 24x - 156 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \dfrac{24 - 20\sqrt{3}}{2} = 12 - 10\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad y_2 = \dfrac{24 + 20\sqrt{3}}{2} = 12 + 10\sqrt{3}$

  les points d'intersection du cercle avec l'axe des abscisses sont $A(0\,;\,12 - 10\sqrt{3})$ et $B(0\,;\,12 + 10\sqrt{3})$

Exercice 6

On considère les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équation respective : $x^2 + y^2 - 4y = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$.

1. Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux cercles.

On considère les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équation respective : $x^2+y^2-4y=0$ et $x^2+y^2=4$.

1. Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles.

- $x^2+y^2-4y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-2)^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad IM^2=4$ avec $M(x\,;\,y)$ et $I(0\,;\,2)$

  C'est donc le cercle de centre $I(0\,;\,2)$ et de rayon 2.

- $x^2+y^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad IM^2=4$ avec $M(x\,;\,y)$ et $I(0\,;\,0)$

  C'est donc le cercle de centre $I(0\,;\,0)$ et de rayon 2.

2. Si un point appartient aux deux cercles alors ses coordonnées vérifient les deux équations de cercle.

On cherche donc des valeurs de $(x\,;\,y)$ telles que $\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 & (L_1) \\ x^2+y^2=4 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4y=0 & \\ 4y=4 & (L_2-L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1^2-4\times 1=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$$

Les points d'intersection des deux cercles sont donc les points $A(\sqrt{3}\,;\,1)$ et $B(-\sqrt{3}\,;\,1)$

Exercice 7

Lors d'une enquête, la justice peut demander une géolocalisation de votre portable. Ce processus repose sur l'activation des relais des émissions de votre portable. On se place ici dans un cas simplifié avec un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ où on possède des informations sur deux relais :

- Le premier relais est $A(1;2)$ et le portable se situe à 3 km de ce A.
- Le second relais est $B(5;6)$ et le portable se situe à une distance égale à $\sqrt{17}$ km de B.

1. Comment traduire les informations données sous forme exploitable ?

2. Peut-on retrouver les coordonnées du portable ?

Corrigé

Lors d'une enquête, la justice peut demander une géolocalisation de votre portable. Ce processus repose sur l'activation des relais des émissions de votre portable. On se place ici dans un cas simplifié avec un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ où on possède des informations sur deux relais :

- Le premier relais est $A(1;2)$ et le portable se situe à 3 km de ce A.

- Le second relais est $B(5;6)$ et le portable se situe à une distance égale à $\sqrt{17}$ km de B.

1. Comment traduire les informations données sous forme exploitable ?

Chaque relais peut géolocaliser les points d'un cercle.

Le relai A peut localiser les portables localisés sur le cercle d'équation : $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

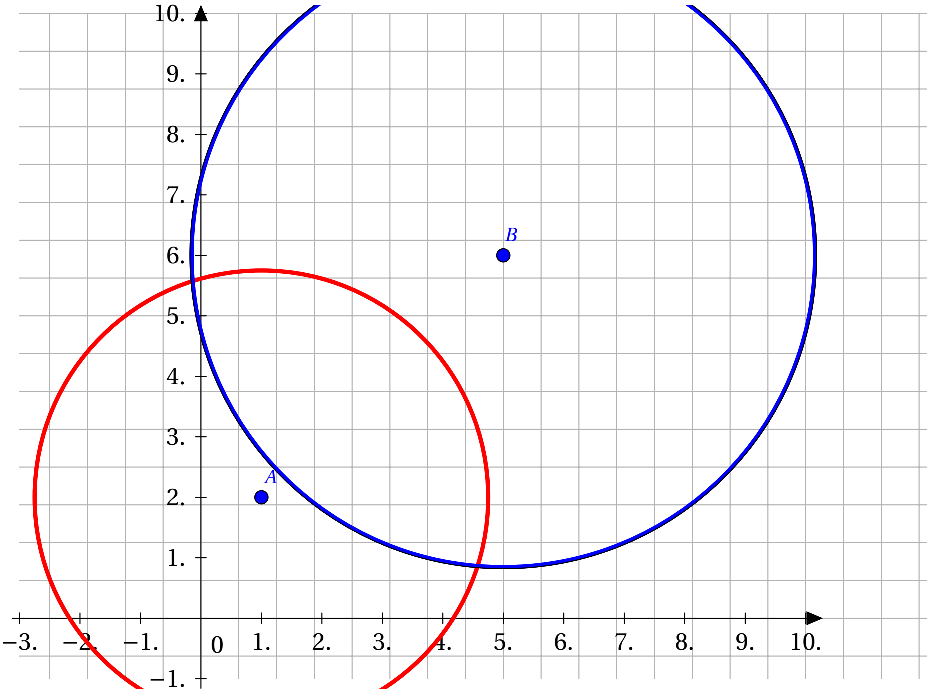
Le relai B peut localiser les portables localisés sur le cercle d'équation : $(x-5)^2+(y-6)^2=17$

2. Peut-on retrouver les coordonnées du portable ?

On cherche les coordonnées des points d'intersection des deux cercles.

On sait qu'un point est sur un cercle si ses coordonnées vérifient l'équation de ce cercle.

On cherche donc les points dont les coordonnées vérifient les deux équations en même temps.



Il nous faut donc résoudre le système : $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=9\\(x-5)^2+(y-6)^2=17\end{cases}$

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=9\\(x-5)^2+(y-6)^2=17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+y^2-4y-4=0\\x^2-10x+y^2-12y+44=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+y^2-4y-4=0\\8x+8y-48=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+y^2-4y-4=0\\y=-x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+(-x+6)^2-4(-x+6)-4=0\\y=-x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-10x+8=0\\y=-x+6\end{cases}$$

$2x^2-10x+8=0 \quad \Leftrightarrow x=1$ ou $x=4$ (utilisation du discriminant)

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=9\\(x-5)^2+(y-6)^2=17\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=1 \quad \text{et} \quad y=5 \quad \text{ou bien} \quad x=4 \quad \text{et} \quad y=2$$

Le portable recherché serait donc à l'un de ces deux points.

Remarque : Comme dit dans le texte, la situation est très simplifiée.

En effet un relai peut en fait localiser tous les points d'une couronne. Mais cela est mathématiquement beaucoup plus complexe.