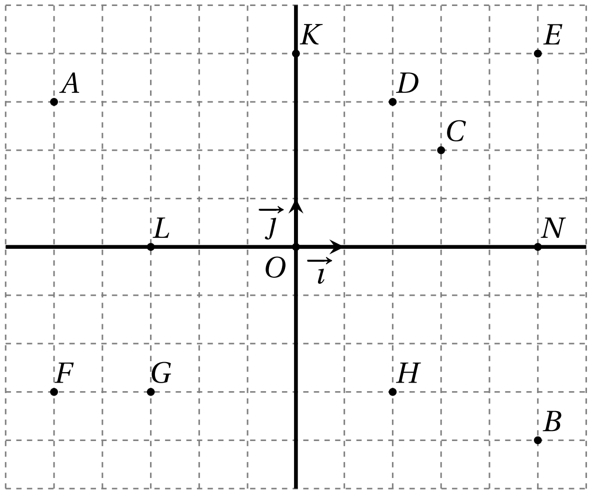
Corrections série 0 : Vecteurs

Exercice 1

On travaille dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ ci-dessous :



Lire les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NB}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$.

Corrigé

Coordonnées de vecteurs :

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NB}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$.

Exercice 2

On travaille dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1. Soient les points $A(1\,;-2)$; $B\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $C(2\,;1)$.
   a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$.
2. Soient les points $E(-2\,;0)$, $F(4\,;3)$, $G(3\,;-2)$ et $H(1\,;-3)$.

   Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$.

Corrigé

On travaille dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1. Soient les points $A(1\,;-2)$; $B\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et $C(2\,;1)$.
   a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\3/2-(-2)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\7/2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\1-(-2)\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 1 \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $x_D - 2 = 1$ soit, $x_D = 3$ et $y_D - 1 = -7/2$ soit, $y_D = -5/2$. Donc, $D\,(3\,;\,-2{,}5)$.

2. Soient les points $E(-2\,;\,0)$, $F(4\,;\,3)$, $G(3\,;\,-2)$ et $H(1\,;\,-3)$.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 3-0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-(-3) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : donc $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{HG}$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires, donc $(EF)//(HG)$

Exercice 3

On travaille dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthonormé.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Quels sont les vecteurs orthogonaux entre eux ?

2. On considère les points $A\,(2\,;\,1)$; $B\,(6\,;\,-3)$; $C\,(8\,;\,5)$ et $D\,(4\,;\,1)$.

a) Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

b) Et les droites (AC) et (BD) ?

c) à revoirDéterminer l'abscisse du point $E\,(x_E\,;\,1)$ tel que (AE) et (BD) soient perpendiculaires.

3. On considère les points $M\,(2\,;\,2)$; $N\,(8\,;\,-2)$ et $P\,(10\,;\,1)$.

Le triangle MNP est-il rectangle ?

4. Le point $C\,(4\,;\,1)$ appartient-il au cercle de diamètre $[AB]$, avec $A\,(2\,;\,3)$ et $B\,(12\,;\,9)$?

Corrigé

On travaille dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ orthonormé.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $xx' + yy' = -6 + 6 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Pour $\vec{u}$ et $\vec{w}$: $xx' + yy' = -24 + 24 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Pour $\vec{u}$ et $\vec{r}$: $xx' + yy' = -12 + 27 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{r}$ ne sont pas orthogonaux.

Pour $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $xx' + yy' = 36 + 16 \neq 0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux.

Pour $\vec{v}$ et $\vec{r}$: $xx' + yy' = 18 - 18 = 0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{r}$ sont orthogonaux.

Pour $\vec{w}$ et $\vec{r}$: $xx' + yy' = 72 - 72 = 0$ donc $\vec{w}$ et $\vec{r}$ sont orthogonaux.

2. On considère les points $A\,(2\,;\,1)$; $B\,(6\,;\,-3)$; $C\,(8\,;\,5)$ et $D\,(4\,;\,1)$.

a) On doit vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux ou pas.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $-16 + 16 = 0$, donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ et donc, $(AB) \perp (CD)$.

b) On procède de la même façon :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $-12+16\neq 0$, donc $\overrightarrow{1}$ et $\overrightarrow{1}$ ne sont pas orthogonaux et donc, les droites (AC) et (BD) ne sont pas perpendiculaires.

c) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et on doit avoir : $-2(x_E-2)=0$, donc $x_E=2$.

3. On considère les points $M(2;2)$; $N(8;-2)$ et $P(10;1)$.

On a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$

En utilisant On a $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, on a $12-12=0$, donc $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{NP}$ ce qui signifie que le triangle MNP est rectangle en N.

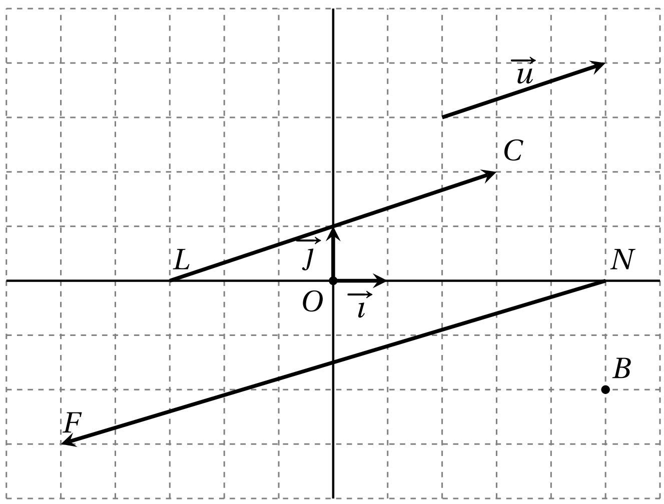
4. On sait que si C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$. On a $xx'+yy'=-16+16=0$, donc $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux donc C appartient pas au cercle de diamètre $[AB]$.

Rem : on peut chercher l'équation du cercle de diamètre $[AB)$ et vérifier si le point C appartient à ce cercle.

Exercice 4

On considère le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ci-dessous :



Graphiquement :

1. Lire les coordonnées des vecteurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{LC}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}$ et $\overrightarrow{LC}$ semblent-ils colinéaires ?

3. $\vec{u}$ et $\overrightarrow{NF}$ semblent-ils colinéaires ?

Par calculs :

1. $\vec{u}$ et $\overrightarrow{LC}$ sont-ils colinéaires ?

2. $\vec{u}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont-ils colinéaires ?

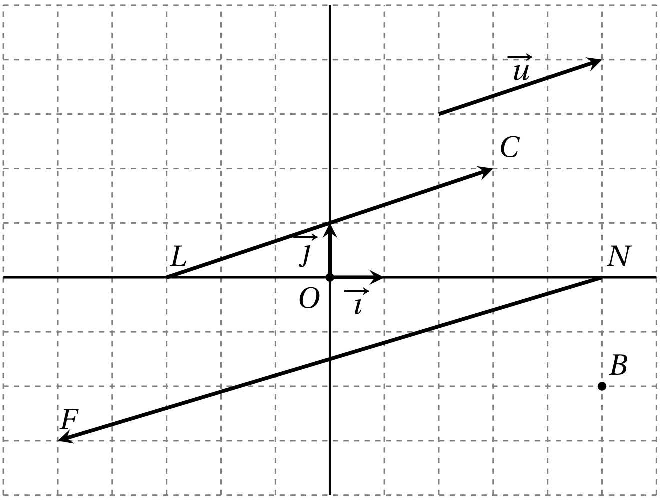
3. Les droites (LC) et (FN) sont-elles parallèles ?

4. Déterminer l'ordonnée du point $E(50; y_E)$ afin que les droites (LC) et (BE) soient parallèles.

5. Les points $P(-12;-3)$, L et C sont-ils alignés ?

Corrigé

On considère le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ ci-dessous :



Graphiquement :

1) Lire les coordonnées des vecteurs :

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{LC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}-10\\-3\end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{LC}$ et $\vec{u}$ semblent colinéaires

3) $\vec{u}$ et $\overrightarrow{NF}$ ne semblent pas être colinéaires

Par calculs :

1) $\overrightarrow{LC} = 2\vec{u}$ donc $\overrightarrow{LC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

2) $xy' - x'y = 3 \times (-3) - 1 \times (-10) = 1 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{NF}$ ne sont pas colinéaires

3) $xy' - x'y = 6 \times (-3) - 2 \times (-10) = 2 \neq 0$
donc $\overrightarrow{LC}$ et $\overrightarrow{NF}$ ne sont pas colinéaires, et les droites correspondantes non parallèles.

4) Les droites (LC) et (BE) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{LC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{LC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-5\\y_E+2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}50-5\\y_E-5\end{pmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}45\\y_E-5\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{LC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires si et seulement $xy' - x'y = 0$
si et seulement $6 \times (y_E - 5) - 2 \times 45 = 0$
si et seulement $6y_E - 30 - 90 = 0$
si et seulement $y_E = 20$

5) Les points P, L et C sont alignés si et seulement $\overrightarrow{PL}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{PL}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PC}\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$
Les points P, L et C sont alignés si et seulement $xy' - x'y = 0$
Or $xy' - x'y = 9 \times 5 - 3 \times 15 = 45 - 45 = 0$
donc $\overrightarrow{PL}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont colinéaires et les points P, L et C alignés

Exercice 5

Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on donne

$$A\,(7\,;\,5)\,,\ B\,(12\,;\,12)\ \text{et}\ C\,(9\,;\,11)$$

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et en déduire celles de $\overrightarrow{BA}$.

2) Calculer les coordonnées de

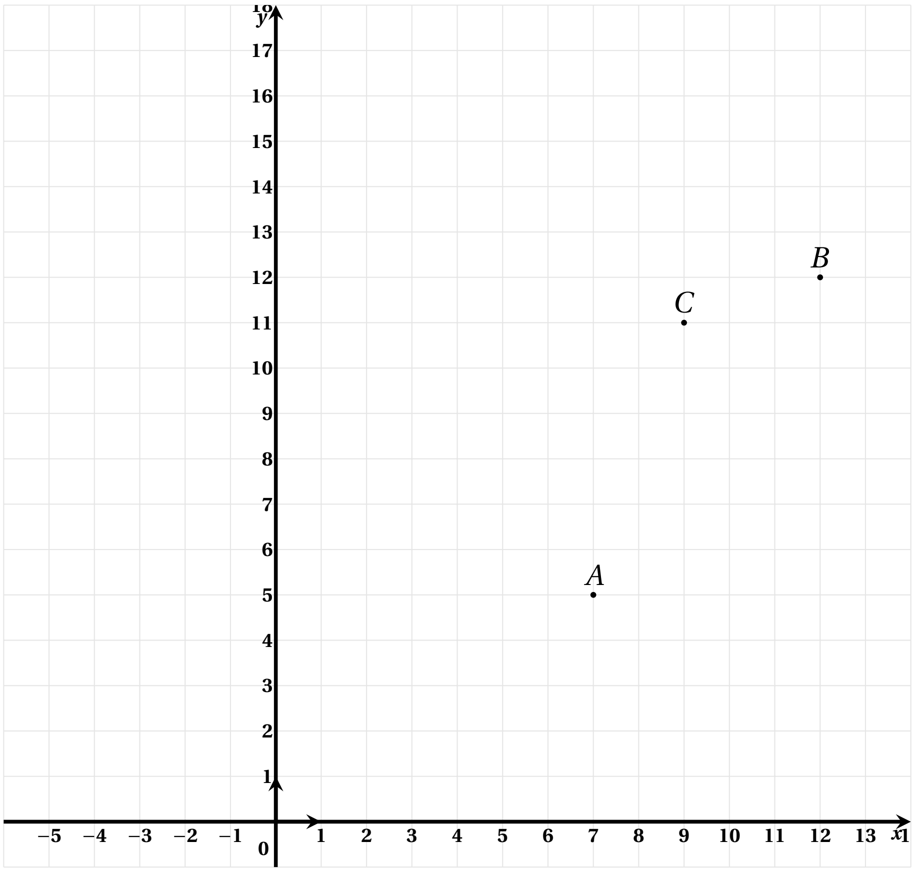
$$\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}$$

3) On note $D\,(x;y)$.

Déterminer les coordonnées de D tel que $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}$

4) On note $E\,(x;y)$.

Déterminer les coordonnées de E tel que $\overrightarrow{EA}=2\,\overrightarrow{EC}$



Corrigé

Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on donne

$$A\,(7\,;\,5)\,,\ B\,(12\,;\,12)\ \text{et}\ C\,(9\,;\,11)$$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$.

2) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5+3\times(-3)\\-7+3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-10\end{pmatrix}$

3) On note $D\,(x;y)$.

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-9\\y-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\-10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ Donc $D(-5\,;\,1)$

4) On note $E\,(x;y)$.

$$\overrightarrow{EA}=2\,\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}7-x\\5-y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9-x\\11-y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}7-x\\5-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18-2x\\22-2y\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}7-x=18-2x\\5-y=22-2y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=11\\y=17\end{cases}$$

Donc $E(11\,;\,17)$