Exercices Série 3 : Plans

26 Soit ABCDEFGH un cube.

On définit les points P, Q et R par les relations vectorielles suivantes : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

1. Construire une figure.

2. Démontrer que les points A, P, Q et R sont coplanaires.

29 Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

1. Déterminer deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

2. Que peut-on en déduire ?

85 [Calculer.]

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = \frac{1}{2}t + 6 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner un vecteur directeur de d.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan dont un repère est $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(-1 ; 2 ; 5)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a. Le point $E(1 ; 1 ; 1)$ appartient-il à ce plan ?

b. La droite d est-elle parallèle à $\mathcal{P}$? Justifier.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ contenant E, de vecteur directeur $\vec{u}$.
Que peut-on dire de Δ et de $\mathcal{P}$?

50 [Calculer.]

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

1. Les vecteurs $\vec{e_1} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{e_2} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{e_3} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?

2. Même question pour les vecteurs $\vec{e_1} = \vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{e_2} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 16\vec{k}$ et $\vec{e_3} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

86 [Chercher.]

Soient les points de l'espace suivants : $A(1 ; 2 ; -3)$, $B(2 ; 4 ; 1)$ et $C(-1 ; 3 ; 2)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

2. Soit $M(x ; y ; z)$, un point du plan (ABC).

a. Justifier qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que $M \in (ABC)$ si, et seulement si, $\begin{cases} x = t - 2t' + 1 \\ y = 2t + t' + 2 \\ z = 4t + 5t' - 3 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$.

c. Le point $E(1 ; 4 ; -7)$ appartient-il au plan (ABC) ?

3. Soit d la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = 3k + 4 \\ z = 9k - 7 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

La droite d est-elle parallèle au plan (ABC) ?

Exercices Série 4 : Fin

17 Soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, trois vecteurs dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Que peut-on en conclure ?

18 On donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{w} = -3\vec{i} - \vec{k}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

2. Que peut-on en conclure ?

37 On donne les points $A(2 ; 3 ; -2)$, $B(1 ; 3 ; 1)$ et $C(-1 ; 1 ; 0)$.

Démontrer que A, B et C définissent un plan.

38 On donne les points $A(1 ; 2 ; 1)$, $B(-1 ; -2 ; 3)$ et $C(1 ; 2 ; 5)$.

Démontrer que les points O, A, B et C sont coplanaires.

27 Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le vecteur $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

28 Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

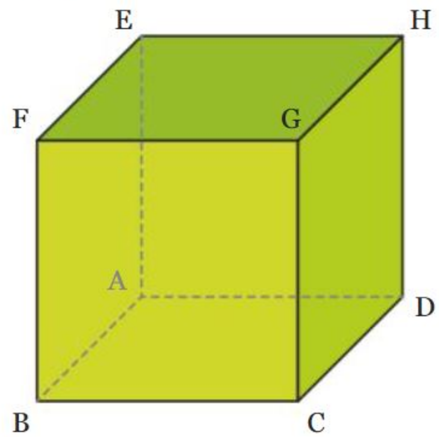
69 **1.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite contenant le point $\mathrm{E}(-8\,;3\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{i}$.

2. Le point $\mathrm{F}(-6\,;3\,;5)$ appartient-il à cette droite ?

91 [Raisonner, Représenter.]

On considère un cube ABCDEFGH et les points suivants :

I est le milieu de $[\mathrm{GH}]$; J est tel que $\overrightarrow{\mathrm{HJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{HD}}$ et K est le milieu de $[\mathrm{FB}]$.



Partie A

1. Reproduire le cube et placer les points I, J et K.

2. a. Justifier que les droites (IJ) et (GC) sont sécantes en un point L.

b. Construire le point L.

3. Construire l'intersection des plans (IJK) et (BCG).

4. Construire la trace de la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).

Partie B

Dans cette partie, l'espace est rapporté au repère $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

On pourra utiliser, sans justification, les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

b. On considère le point $\mathrm{P}\left(\frac{4}{7}\,;\frac{4}{7}\,;\frac{4}{7}\right)$. Montrer que $\mathrm{P} \in (\mathrm{AG})$.

3. a. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{IP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ sont coplanaires.

b. Que peut-on en déduire ?

4. Le plan (ABG) est un plan diagonal du cube. Déterminer l'intersection de (ABG) et (IJK).

34 Soit ABCDEFGH un cube.

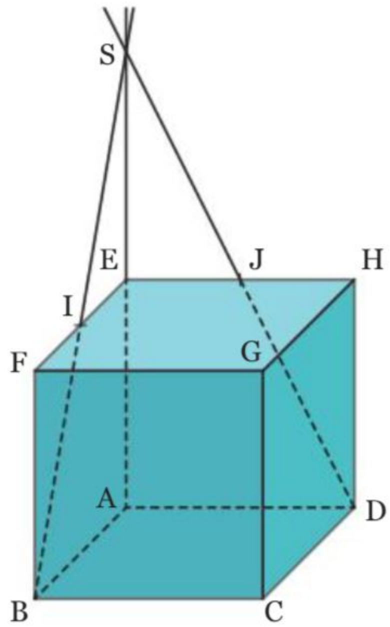
L'espace est rapporté au repère $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

J est le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

Démontrer que les points I, J et G sont alignés.

59 On considère le cube ABCDEFGH et on note I le milieu de $[\mathrm{FE}]$, S l'intersection de (AE) et (BI) et J l'intersection de la droite (EH) avec le plan (BDS).



Démontrer que (IJ) et (BD) sont parallèles.

60 On considère un triangle ABC, I un point du segment $[\mathrm{AB}]$ et J un point du segment $[\mathrm{AC}]$, la droite (IJ) n'étant pas parallèle à la droite (BC). On note S un point n'appartenant pas au plan (ABC).

Réaliser une figure à main levée et déterminer l'intersection de la droite (BC) et du plan (SIJ).

94 **VRAI/FAUX** [Raisonner, Communiquer.]

L'espace est rapporté au repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;-1)$, $\mathrm{B}(2\,;-1\,;3)$, $\mathrm{C}(2\,;-1\,;1)$ et $\mathrm{D}(3\,;-1\,;1)$.

On donne des représentations paramétriques des droites d et d' :

$$d : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -6t-1 \\ z = 8t+3 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ et } d' : \begin{cases} x = t'+1 \\ y = -3t'+2 \\ z = 6t'-3 \end{cases} (t' \in \mathbb{R}).$$

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Les droites d et (AB) sont parallèles.

2. La droite d' est parallèle au plan (ABC).

3. D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

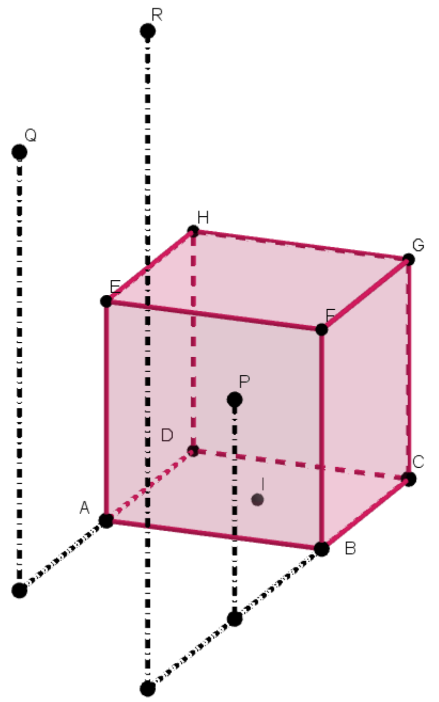
4. $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ est un repère de l'espace.

5. Les droites d et (AB) sont coplanaires.

Corrigé Série 3 : Plans

Corrigé exercice 26 :

1. Voici une représentation de la figure.



2. $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}$
   $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$
   $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont coplanaires. Les points A, P, Q et R sont coplanaires.

Corrigé exercice 29 :

1. On cherche les réels λ et μ tels que :
   $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$. $3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} = \lambda(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + \mu(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k})$
   $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{i} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{j} + (2\lambda - 2\mu)\overrightarrow{k}$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ \lambda - \mu = -1 \\ 2\lambda - 2\mu = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$
   On a donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 50 :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existes deux réels simultanément non nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$.
   $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -3\lambda = -1 \\ 2\lambda + \mu = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 - \lambda = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = 2 - 2\lambda = 2 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$

Le système n'est pas compatible. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existes deux réels simultanément non nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2}$.

$\overrightarrow{e_3} = \lambda\overrightarrow{e_1} + \mu\overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ -6\lambda - 3\mu = 3 & (2) \\ -\lambda + 16\mu = 5 & (3) \end{cases}$

On résout le système formé de la première et la troisième équation.

$\begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ -\lambda + 16\mu = 5 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 6\mu = 1 & (1) \\ 22\mu = 6 & (1) + (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - 6\mu = 1 - 6 \times \frac{3}{11} = -\frac{7}{11} \\ \mu = \frac{3}{11} \end{cases}$

On vérifie la compatibilité de ces valeurs avec la deuxième équation du système initial : $-6\times(-\frac{7}{11})-3\times\frac{3}{11} = 3$. L'égalité (2) est bien respectée.

On a donc $\overrightarrow{e_3} = -\frac{7}{11}\overrightarrow{e_1} + \frac{3}{11}\overrightarrow{e_2}$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 85 :

1. $\overrightarrow{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\overrightarrow{t'}\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussi.

2. a. $E(1;1;1)$ appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe λ et μ tels que : $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

   $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ équivaut à $\begin{cases} 2 = \lambda - 6\mu \\ -1 = \lambda + 4\mu \\ -4 = \lambda - 3\mu \end{cases}$.

   En résolvant le système constitué des deux premières équations on obtient : $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{5}\mu = -\frac{3}{10} \end{cases}$.

   Or, ces valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc le système est incompatible et le point E n'appartient pas au plan.

   b. La droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{t'}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{t'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 6b = -2 & (1) \\ a + 4b = 8 & (2) \\ a - 3b = 1 & (3) \end{cases}$.

   On résout le système composé des équations (2) et (3).

   $\begin{cases} a + 4b = 8 \\ a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b = 8 \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$

   On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (1) du système initial : $a - 6b = 4 - 6 \times 1 = -2$. Ce système est compatible. On a donc $\overrightarrow{t'} = 4\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Les trois vecteurs $\overrightarrow{t'}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires. La droite d est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$.

   c. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ qui dirige la droite Δ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. Ainsi, la droite Δ est parallèle à $\mathcal{P}$. Cependant, comme le point E n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors Δ et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.

Corrigé exercice 86 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$. Or $\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent le plan (ABC).

2. a. $M(x;y;z)\in(ABC)$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AC}$.

   b. Donc $M\in(ABC)$ si, et seulement si, $\begin{cases}x-1=1t-2t'\\y-2=2t+t'\\z+3=4t+5t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t-2t'+1\\y=2t+t'+2\\z=4t+5t'-3\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $t'\in\mathbb{R}$.

   c. $E(1;4;-7)\in(ABC)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que :
   $$\begin{cases}1=t-2t'+1\\4=2t+t'+2\\-7=4t+5t'-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-2t'=0 & (1)\\2t+t'=2 & (2)\\4t+5t'=-4 & (3)\end{cases}$$
   On résout le système composé des équations (1) et (2).
   $$\begin{cases}t-2t'=0\\2t+t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-2t'=0\\5t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{4}{5}\\t'=\frac{2}{5}\end{cases}$$
   On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (3) du système initial : $4t+5t'=4\times\frac{4}{5}+5\times\frac{2}{5}=\frac{26}{5}\neq-4$.
   Le système n'est pas compatible. Le point E n'appartient pas au plan (ABC).

3. La droite d admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\9\end{pmatrix}$.

   d est parallèle au plan (ABC) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Or, $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires et la droite d est parallèle au plan (ABC).

   D'après la représentation paramétrique de la droite d, le point $E(1;4;-7)$ appartient à d. Or, $E\notin(ABC)$. La droite d est donc strictement parallèle au plan(ABC).

Corrigé Série 4 : Fin

Corrigé exercice 17 :

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Ces 3 vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 18 :

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$.

2. Ces 3 vecteurs sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 27 :

On cherche les réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ soit :

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow a\overrightarrow{i} + (b+c)\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

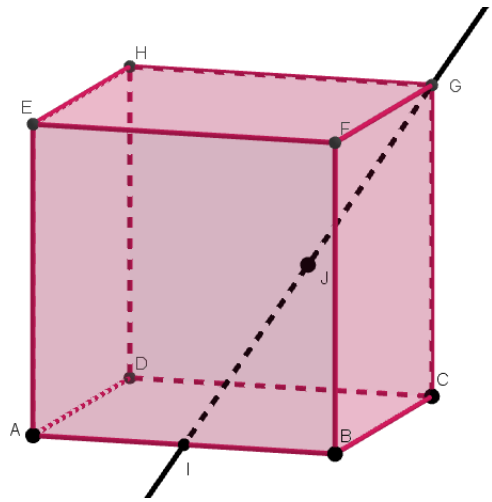
Les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants.

Corrigé exercice 28 :

On cherche les réels a, b et c tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ soit :
$a(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + b(\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + c(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow (a+c)\overrightarrow{i} + (a+b)\overrightarrow{j} + (2a+2b+c)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont linéairement indépendants.

Corrigé exercice 34 :

I est le milieu de $[AB]$. Donc, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



D'une part, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. D'autre part, $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, d'où $\overrightarrow{IG} = 2(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{IJ}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires. Les points I, J et G sont alignés.

Corrigé exercice 37 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\3-3\\1-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\1-3\\0-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Comme $\frac{-1}{-3}\neq\frac{0}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

Corrigé exercice 38 :

O, A, B et C sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels non simultanément nuls λ et μ tels que $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$.

On a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$.

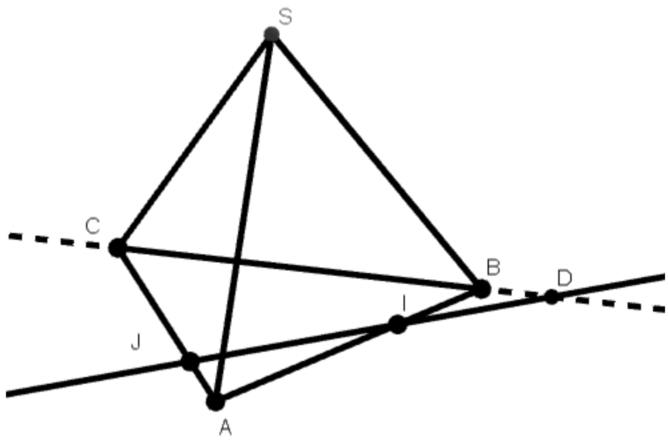
$$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda+\mu=1 & (1)\\-2\lambda+2\mu=2 & (2)\\3\lambda+5\mu=1 & (3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda+\mu=1 & (1)\\8\mu=4 & (3)+3\times(1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2}\\\mu=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

On a donc $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Les points O, A, B et C sont donc coplanaires.

Corrigé exercice 59 :

$I\in(BS)$ donc $I\in(BDS)$ et $J\in(BDS)$. Ainsi, $(IJ)\subset(BDS)$. $I\in(EF)$ donc $I\in(EFG)$ et $J\in(EH)$ donc $J\in(EFG)$. Ainsi $(IJ)\subset(EFG)$ De plus $(BD)\subset(BCD)$. Les plans (EFG) et (BCD) sont parallèles (par les propriétés des faces opposées dans un cube). Le plan (BDS) coupe le plan (EFG) selon la droite (IJ) et le plan (BCD) selon la droite(BD). Les deux droites (IJ) et (BD) sont donc parallèles.

Corrigé exercice 60 :



Les droites (IJ) et (BC) se coupent en D. Le point D appartient à la droite (IJ) donc au plan (SIJ). Le point D appartient aussi à la droite (BC). Le point D est donc l'intersection de la droite (BC) et du plan (SIJ).

Corrigé exercice 69 :

1. Une représentation paramétrique de la droite est $\begin{cases}x=t-8\\y=3\\z=5\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. Avec $t=2$, on a $\begin{cases}x=-6=x_F\\y=3=y_F\\z=5=z_F\end{cases}$. Le point F appartient donc à cette droite.

Corrigé exercice 91 :

Partie A

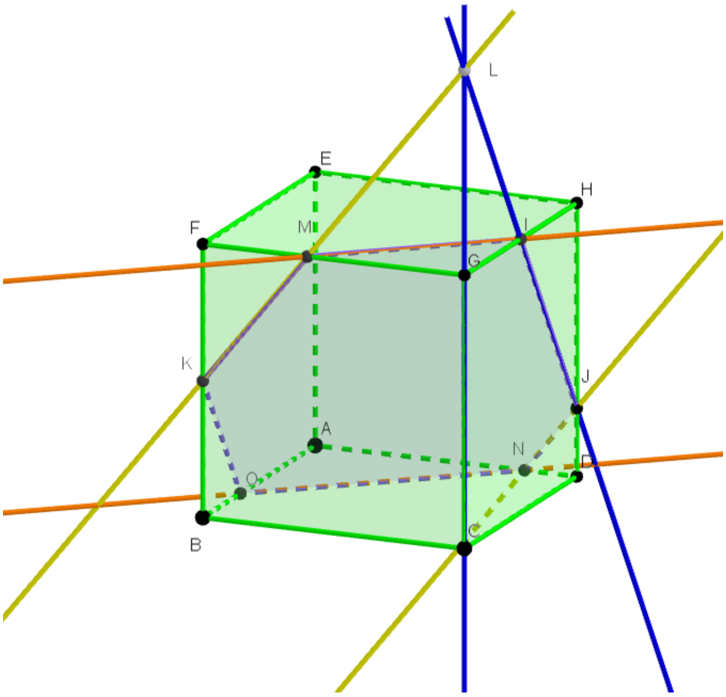
1. Voir la figure ci-dessous.
2. a. (IJ) et (GC) sont deux droites du plan(CDG).
   Elles ne sont clairement pas parallèles. Elles sont donc sécantes, en L.

   b. Voir la figure ci-dessous.
3. L'intersection des plans (IJK) et (BCG) est la droite (KL) (voir la figure ci-dessous).
4. (LK) et (FG) sont deux droites du plan (FBC). Elles se coupent en M.

   Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (FBC) et (EAD) selon deux droites parallèles. La parallèle à (MK) passant par J coupe (AD) en N.

   Le plan (IJK) coupe les plans parallèles (ABC) et (EFG) selon deux droites parallèles. La parallèle à (IM) passant par N coupe (AB) en O.

   La trace de la section du cube par le plan (IJK) est le polygone $IJNOKM$.



Partie B

Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE},\right)$, on a les coordonnées suivantes :
$A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $C(1;1;0)$.

1. En utilisant les coordonnées du milieu d'un segment, on obtient $I\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et $K\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HD} \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} x_J - x_H = \frac{3}{4}(x_D - x_H) \\ y_J - y_H = \frac{3}{4}(y_D - y_H) \\ z_J - z_H = \frac{3}{4}(z_D - z_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 0 \\ y_J = 1 \\ z_J = \frac{1}{4} \end{cases}$$
2. a. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AG) et $A(0;0;0)$ appartient à cette droite. Une représentation paramétrique de (AG) est donc $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. Avec $t = \frac{4}{7}$, on a $\begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = \frac{4}{7} \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$ donc $P\left(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{4}{7}\right) \in (AG)$.

3. a. On détermine les coordonnées suivantes par le calcul : $\overrightarrow{IP}\begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que
$\overrightarrow{IP} = a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{14} & (1) \\ 0a - b = -\frac{3}{7} & (2) \\ -\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}b = -\frac{3}{7} & (3) \end{cases}$
On résout le système composé des équations (1) et (2).
$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{14} & (1) \\ 0a - b = -\frac{3}{7} & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{3}{7} \end{cases}$
On vérifie la compatibilité de ces deux valeurs avec l'équation (3) du système initial :
$-\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}b = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$.
On a donc $\overrightarrow{IP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{IJ} + \frac{3}{7}\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IP}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont coplanaires.

b. On en déduit que le point P est donc un point du plan (IJK).

4. Le point P est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (IJK). Le point P appartient donc à l'intersection des plans (ABG) et (IJK). I est le milieu de $[GH]$. Il est donc un point du plan (ABG). Puisque le point I appartient également au plan (IJK), l'intersection du plan (ABG) et (IJK) est donc la droite (IP).

Corrigé exercice 94 :

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$, vecteur directeur de la droite d, a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{u}$ donc d et (AB) sont parallèles.
L'affirmation est vraie.

2. $\overrightarrow{v}$, vecteur directeur de la droite d', a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. De plus, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. d' est parallèle au plan (ABC) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -3a - 3b = -3 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$.
$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ où $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de la droite d' donc d' est parallèle au plan (ABC).
L'affirmation est vraie.

3. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB}$ donc D n'est pas l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
L'affirmation est fausse.

4. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère de l'espace si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont

linéairement indépendants soit si, et seulement si, $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$. On a :

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2c=0 \\ -3a-3b-3c=0 \\ 4a+2b+2c=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2c=0 \\ 3c=0 \\ 4a+2b+2c=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est donc bien un repère de l'espace.

L'affirmation est vraie.

5. D'après la première question, les droites (AB) et d sont parallèles. Elles sont donc coplanaires.

   L'affirmation est vraie.