Exercices Série 2 : Droites

39 On donne les points $E(4\,;7\,;2)$ et $F(3\,;1\,;-5)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).

2. On donne la droite δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 6t-1, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 7t \end{cases}$

Étudier la position relative de δ et (EF).

83 [Représenter.]

Déterminer l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifiant :

1. $\begin{cases} x = 2t-4 \\ y = t+1 \quad , t \in \mathbb{R}^+. \\ z = -3t+4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = t-3 \\ y = 3t+2, \ t \in [-2\,;3]. \\ z = t+1 \end{cases}$

84 [Calculer.]

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1\,;-1\,;3)$ et $B(3\,;2\,;4)$.

2. On considère le point $E(-5\,;7\,;1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).

3. On considère le point $F(-1\,;13\,;3)$.

a. Justifier que (AF) et d ne sont pas parallèles.

b. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

79 [Calculer.]

Dans chacun des cas suivants, donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(-1\,;2\,;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

2. $A(1\,;7\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

3. $A(-1\,;0\,;4)$ et $\vec{u} = \vec{k}$.

81 [Chercher.]

Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$d : \begin{cases} x = -2t+3 \\ y = -3t+1, \ t \in \mathbb{R} \\ z = t+2 \end{cases}$

$d' : \begin{cases} x = t'+1 \\ y = -2t', \ t' \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$

1. Pour chaque droite, donner un point et un vecteur directeur.

2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? Sécantes ? Justifier.

3. Que peut-on en conclure ?

---

déjà corrigés à la fin du livre :

55 [Chercher.]

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
On donne $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.
Déterminer un vecteur $\vec{w}$ tel que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient linéairement indépendants.

46 [Représenter.]

Soit ABCDEFGH un cube. On note I le centre du carré ABCD, J le centre du carré EFGH et K le milieu de $[IJ]$.

1. Faire une figure.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4. En déduire que K est le milieu de $[AG]$.

1 Travailler les automatismes p 72

Corrigé exercice 39 :

1. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-6\\-7\end{pmatrix}$ donc d'après le résultat du cours : $\begin{cases}x=-t+4\\y=-6t+7\\z=-7t+2\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. Un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\6\\7\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{EF}$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Les droites (EF) et δ sont parallèles.

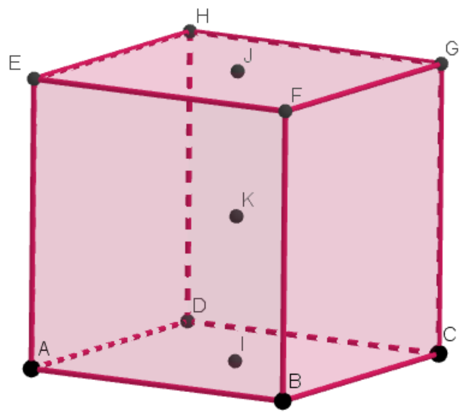
   Pour $E(4;7;2)$ on a donc : $\begin{cases}t+1=4\\6t-1=7\\7t=2\end{cases}$ soit $\begin{cases}t=3\\t=\frac{4}{3}\\t=\frac{2}{7}\end{cases}$.

   Le système n'est pas compatible donc le point E n'appartient pas à la droite δ.

   Les droites (EF) et δ sont donc strictement parallèles.

Corrigé exercice 46 :

1. Voici une représentation de la figure.



2. $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

3. K est le centre du cube donc $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

4. On a alors $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$. K est donc le milieu de $[AG]$.

Corrigé exercice 55 :

On pose $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{k}$.
$a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(2a+b)\overrightarrow{i}+(-3a+5b)\overrightarrow{j}+(a-3b+c)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\-3a+5b=0\\a-3b+c=0\end{cases}$
Le système formé des deux premières équations admet pour solutions $(a;b)=(0;0)$.
Avec ces valeurs et la troisième équation, on obtient $c=0$.
Dans ce cas, les trois vecteurs sont linéairement indépendants. Ce n'est pas le seul cas (voir le corrigé dans le manuel à la page 453).

2 Exercices d'entraînement p 74à79

Corrigé exercice 79 :

1. $\begin{cases} x = 1t - 1 \\ y = 0t + 2 = 2 \\ z = 2t + 5 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 1t + 7 \\ z = -\frac{1}{3}t + 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. $\begin{cases} x = 0t - 1 = -1 \\ y = 0t + 0 = 0 \\ z = 1t + 4 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 81 :

1. La droite d contient le point $A(3;1;2)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. La droite d' contient le point $A'(1;0;4)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $\frac{-2}{1} \neq \frac{-3}{-2}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les droites d et d' ne sont pas parallèles.
   Si les droites d et d' sont sécantes, les coordonnées $(x;y;z)$ de leur point d'intersection doivent vérifier les deux systèmes de représentation paramétrique.
   C'est-à-dire $\begin{cases} x = -2t + 3 = t' + 1 \\ y = -3t + 1 = -2t' \\ z = t + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \times 2 + 3 = t' + 1 \\ -3 \times 2 + 1 = -2t' \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 \\ t' = \frac{5}{2} \\ t = 2 \end{cases}$.
   Ce système n'est pas compatible. Un tel point M n'existe pas. Les droites d et d' ne sont pas sécantes.

3. d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes. Elles ne sont donc pas coplanaires.

Corrigé exercice 83 :

1. Ce système est la représentation graphique d'une droite d contenant le point $A(-4;1;4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
   Ici, $t \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $t \geqslant 0$.
   Avec $t = 0$, $\begin{cases} x = 2 \times 0 - 4 = -4 \\ y = 0 + 1 = 1 \\ z = -3 \times 0 + 4 = 4 \end{cases}$.
   Avec $t = 1$, $\begin{cases} x = 2 \times 1 - 4 = -2 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = -3 \times 1 + 4 = 1 \end{cases}$.
   L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine A contenant le point $B(-2;2;1)$.

2. Ce système est la représentation graphique d'une droite d passant par $A(-3;2;1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$.

Ici, $t \in [-2\,;3]$.

Avec $t=-2$, $\begin{cases} x=-2-3=-5 \\ y=3\times(-2)+2=-4 \\ z=-2+1=-1 \end{cases}$.

Avec $t=3$, $\begin{cases} x=3-3=0 \\ y=3\times 3+2=11 \\ z=3+1=4 \end{cases}$.

L'ensemble cherché est le segment $[BC]$ avec $B(-5;-4;-1)$ et $C(0;11;4)$.

Remarque : $A\in[BC]$ car les coordonnées de A s'obtiennent en choisissant $t=0$ et $0\in[-2;3]$.

Corrigé exercice 84 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $A(1;-1;3)\in(AB)$.

   Une représentation graphique de la droite (AB) est $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \\ z=1t+3 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

2. d est parallèle à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d. $E(-5;7;1)\in d$.

   Une représentation graphique de la droite d est $\begin{cases} x=2t'-5 \\ y=3t'+7 \\ z=1t'+1 \end{cases}$ avec $t'\in\mathbb{R}$.

3. a. On détermine les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\14\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

   $\frac{-2}{2}\neq\frac{14}{3}$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (AF) et d ne sont donc pas parallèles. Elles sont sécantes ou non coplanaires.

   b. Une représentation graphique de la droite (AF) est $\begin{cases} x=-2t''+1 \\ y=14t''-1 \\ z=3 \end{cases}$ $(t''\in\mathbb{R})$.

   $M(x;y;z)$ est le point d'intersection des droites (AF) et d si, et seulement si,

   $$\begin{cases} x=-2t''+1=2t'-5 \\ y=14t''-1=3t'+7 \\ z=3=t'+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2t''+1=2\times 2-5 \\ y=14t''-1=3\times 2+7 \\ t'=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t''=1 \\ t''=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

   Ce système admet pour solution $(t';t'')=(2;1)$. Les deux droites sont sécantes.

   En remplaçant t' par 2 dans le système de représentation paramétrique de la droite d, on trouve : $\begin{cases} x=2\times 2-5=-1 \\ y=3\times 2+7=13 \\ z=2+1=3 \end{cases}$.

   Conclusion : les droites d et (AF) sont coplanaires, sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées $(-1;13;3)$. Elles se coupent donc en F.