

Exercices Série 1 : coordonnées

Pour les exercices 35 à 39

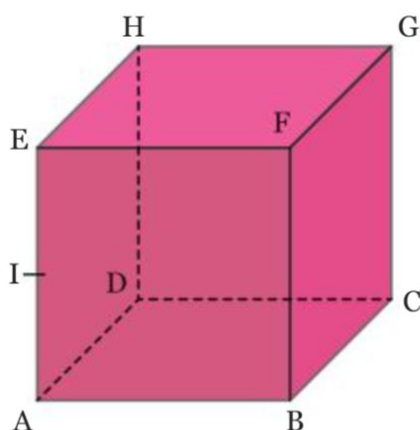
L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

35 On donne les points $E(1; -3; 4)$, $F(2; -1; 1)$ et $G(-1; 0; 2)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\vec{EF}$, $\vec{EG}$, $-3\vec{EG} + 2\vec{EF}$ et $2\vec{FG} + \vec{EF}$.

36 On donne les points $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$ et $C(3; -4; 5)$.

Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

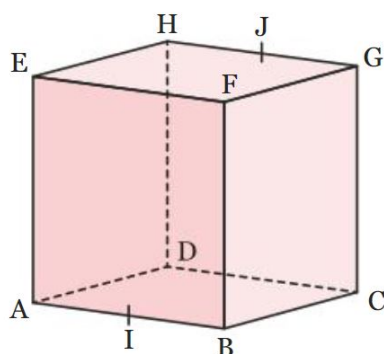
58 On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous.



1. Donner un repère du plan (ABC).
2. Donner un repère de la droite (AE).
3. On note I le milieu de [AE].
 - a. $(I; \vec{AB}, \vec{DC})$ est-il un repère d'un plan ? Justifier.
 - b. $(I; \vec{IE}, \vec{AB})$ est-il un repère d'un plan ? Justifier.
4. Donner trois différentes bases de l'espace en utilisant les points de la figure.

61 [Communiquer.]

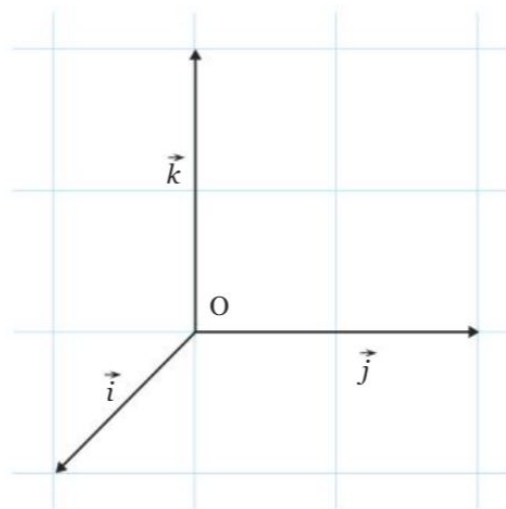
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



1. Justifier que $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est une base de l'espace.
2. On note I le milieu de [AB] et J celui de [HG]. Exprimer le vecteur $\vec{IJ}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

71 [Représenter.]

1. Reproduire et prolonger la figure ci-dessous puis placer les points $A(1; 0; 2)$, $B(1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$ et $D(1; -2; 1)$.



2. On considère le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Construire le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine $M(0; -1; 1)$.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$. Que peut-on en déduire ?

67 On considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 1; 4)$ et $C(3; 5; -2)$.

Déterminer les coordonnées du point D telles que ABCD soit un parallélogramme.

68 On considère les points $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 2)$ et $C(-1; 3; 4)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu de [AC].
2. Déterminer les coordonnées de D telles que ABCD soit un parallélogramme.

74 [Calculer.]

On considère les points $A(0; 1; 1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; 1; 1)$ et $D(1; 1; 1)$.

1. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
2. Soit E le point de coordonnées $(2; 2; 4)$. Déterminer les coordonnées du point F telles que ACEF soit un parallélogramme.
3. Soit I le point de l'espace tel que F soit le milieu de [AI] et J le milieu de [EF]. Démontrer que J est le milieu de [IC].

1 Travailler les automatismes p 72

Corrigé exercice 35 :

On a : $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et ainsi, $-3\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 36 :

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a aussi $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3-1 \\ -4-2 \\ 5-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

2 Exercices d'entraînement p 74à79

Corrigé exercice 58 :

1. Un repère du plan (ABC) peut être $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Un repère de la droite (AE) peut être $(A; \overrightarrow{AE})$.
3. $(I; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$ n'est pas un repère du plan car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires. $(I; \overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AB})$ est un repère du plan (ABE) . En effet, les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
4. On peut citer comme base de l'espace $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$ ou encore $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$.

Corrigé exercice 61 :

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace car les trois vecteurs ne sont pas coplanaires (propriétés du cube).
2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$
 $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

Corrigé exercice 67 :

$ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 2 \\ z_D - 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 5 - 1 \\ -2 - 4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 4 \\ y_D - 2 = 4 \\ z_D - 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 6 \\ z_D = -3 \end{cases}$$

Le point D a pour coordonnées $(5; 6; -3)$.

Corrigé exercice 68 :

1. Notons I le milieu de $[AC]$. Alors :
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Donc I a pour coordonnées $(0; \frac{5}{2}; \frac{5}{2})$.

2. $ABCD$ est un parallélogramme si, et seulement si, le milieu I de la diagonale $[AC]$ est le milieu de la diagonale $[BD]$.

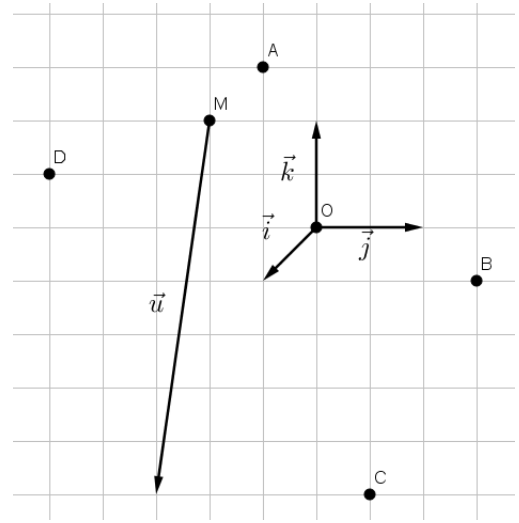
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_D}{2} \\ z_I = \frac{z_B + z_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = -3 \\ y_D = 2y_I - y_B = 6 \\ z_D = 2z_I - z_B = 3 \end{cases} \quad \text{et } D \text{ a pour coordonnées } (-3; 6; 3).$$

Corrigé exercice 71 :

- Voici une représentation de la figure.
- Voir ci-contre.

3. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On constate alors que $\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$. Les deux vecteurs sont colinéaires.



Corrigé exercice 74 :

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est donc un parallélogramme.

2. $ACEF$ est un parallélogramme si, et seulement si,

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 0 = 2 - 3 \\ y_F - 1 = 2 - 1 \\ z_F - 1 = 4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -1 \\ y_F = 2 \\ z_F = 4 \end{cases}.$$

3. F est le milieu de $[AI] \Leftrightarrow \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2x_F - x_A = -2 \\ y_I = 2y_F - y_A = 3 \\ z_I = 2z_F - z_A = 7 \end{cases}.$

Ainsi, $\overrightarrow{CI} \begin{pmatrix} -2 - 3 \\ 3 - 1 \\ 7 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $\begin{cases} x_J = \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{2 + 2}{2} = 2 \\ z_J = \frac{4 + 4}{2} = 4 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 3 \\ 2 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a finalement $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CJ}$ donc J est le milieu de $[CI]$.

Voici une autre méthode possible.

D'après l'énoncé, on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FI} \text{ et } \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{JE}.$$

$$\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{JE} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{JI}$$

On a ainsi $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JI}$ donc J est le milieu de $[CI]$.