Cours : Vecteurs

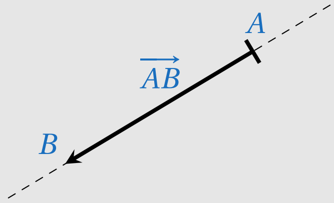
1/ Caractéristiques et Coordonnées d'un vecteur

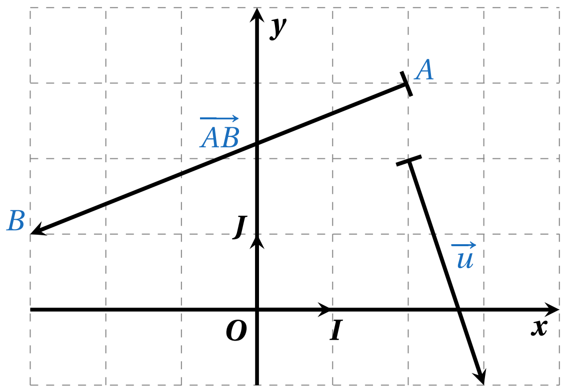
Définition :

Soient A et B deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par

- sa *direction* : la droite (AB).
- son *sens* : de A vers B.
- sa *longueur* ou sa *norme* : la longueur du segment $[AB]$, soit

AB ou encore $\|\overrightarrow{AB}\|$





Exemples : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Théorème : Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, si $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

2/ Opérations sur les vecteurs

a) Coordonnées et addition de vecteurs

Théorème :

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\boldsymbol{\vec{u}} + \boldsymbol{\vec{v}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x+x'} \\ \boldsymbol{y+y'} \end{pmatrix}$.
On traduit donc l'opération vectorielle sur chacune des coordonnées.

b) Coordonnées et multiplication d'un vecteur par un nombre

Théorème :

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et λ un réel, alors on a $\boldsymbol{\lambda\vec{u}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda x} \\ \boldsymbol{\lambda y} \end{pmatrix}$
On traduit donc l'opération vectorielle sur chacune des coordonnées.

Cas particuliers : Vecteurs opposés

Le vecteur *opposé* à $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ qui a

la *même direction* que $\vec{u}$, la *même norme* que $\vec{u}$ mais de sens *sens opposé* à $\vec{u}$.

Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB}$ mais aussi $\overrightarrow{BA}$. Ainsi, on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

3/ Colinéarité

Définition :

On dit que deux vecteurs sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la *même direction*.

Par convention, le vecteur nul (qui ne possède pas de direction) est colinéaire à tout autre vecteur.

Théorème :

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** équivaut à dire qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.
- Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si

$$\boldsymbol{xy' - x'y = 0}$$

Point méthodes :

- Pour démontrer que les doites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés, on peut montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

4/Orthogonalité et distance

On se place ici dans plan muni d'un repère **orthonormé** $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Propriété :

Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.
La **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Définition :

On dit que deux vecteurs sont **orthogonaux** lorsque leur direction sont *perpendiculaires*.

Par convention, le vecteur nul (qui ne possède pas de direction) est orthogonal à tout autre vecteur.

Théorème :

- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\boldsymbol{xx' + yy' = 0}$$

Remarque :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.