Cours : Géométrie dans l'espace (Partie 1)

Parcours : Comment décrire l'espace ?... pour le reproduire.

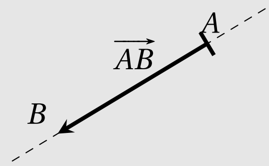
I. Vecteurs dans l'espace

1. Du plan à l'espace

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise sans difficultés à l'espace.

Définition :

Soient A et B deux poinst distincts. Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par



- sa **direction** : la droite (AB).
- son **sens** : de A vers B.
- sa **longueur** ou sa **norme** : la longueur du segment $[AB]$, soit AB ou encore $\|\overrightarrow{AB}\|$

Notations et vocabulaire :

- Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, A est l'**origine** du vecteur et B est l'**extrémité**.
- Les vecteurs peuvent aussi se noter avec une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

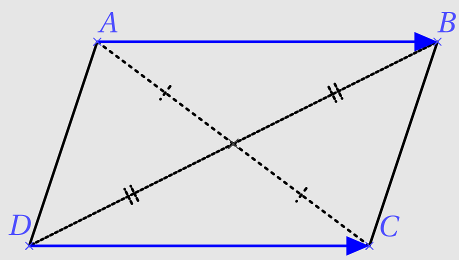
Les notions suivantes se généralisent aussi à l'espace :

Propriété :

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Propriété :

Les affirmations suivantes sont équivalentes :



- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $ABCD$ est un parallélogramme.
- $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu

Propriété : Relation de Chasles

Pour tout point A, B et C de l'espace on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

*Pour les petits : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si l'un est « multiple » de l'autre.*

Propriété : Alignement et vecteurs colinéaires

Trois points A, B et C de l'espace sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

2. Base de l'espace

Définition : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si l'un est **combinaison linéaire** des deux autres. Autrement dit : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

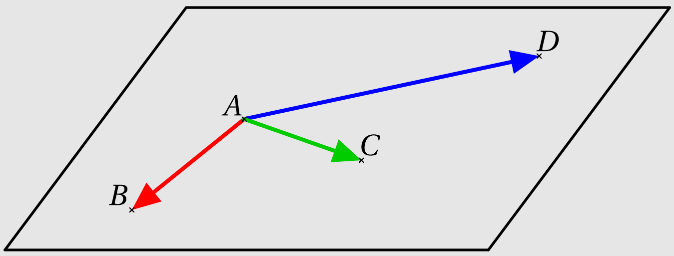
Remarque :

Si de plus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et non colinéaires, la décomposition $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est unique.

Propriété :

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont **coplanaires** si, et seulement si, les points A, B, C et D appartiennent à un même plan.

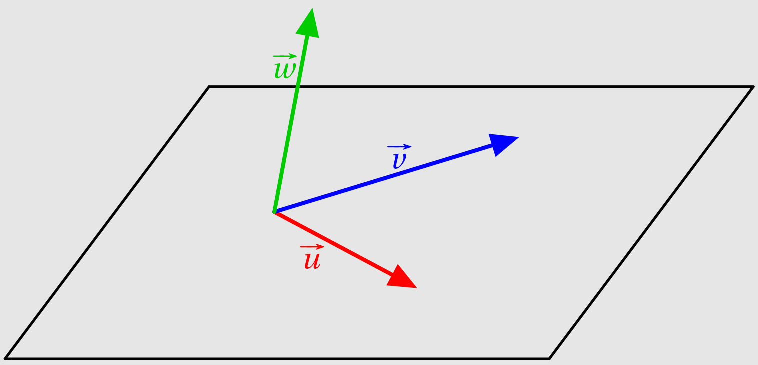


Définition : Vecteurs linéairement indépendants et base

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **linéairement indépendants** lorsqu'ils ne sont **pas coplanaires**.

Autrement dit : $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0$.

On dit alors que ces trois vecteurs forment une **base** de l'espace.



Théorème : Unicité de la décomposition dans une base

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs formant une **base** de l'espace alors tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace se **décompose de manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Autrement dit :

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **trois vecteurs non coplanaires**, il existe, pour tout vecteur $\vec{V}$, un triplet unique de nombres réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

On dit alors que $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les **coordonnées** de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note $\vec{V}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. Coordonnées de vecteurs dans une base

Définition : Repère de l'espace

Un **repère de l'espace** est un quadruplet $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, où O est un point de l'espace appelé **origine** et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une **base** de l'espace.

Théorème : Unicité des coordonnées dans un repère

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un **unique triplet** de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

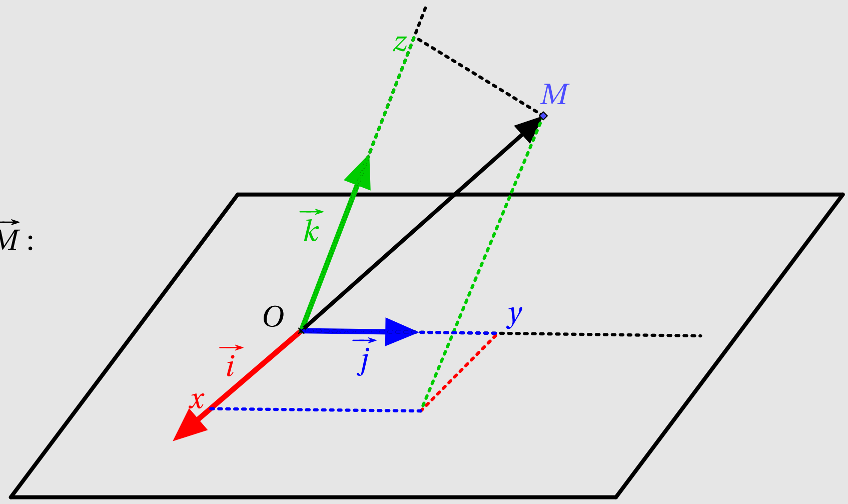
On parle alors de **coordonnées** : (x : abscisse, y : ordonnée, z : cote).

- On note les **coordonnées** du point M :

$$M(x\,;y\,;z)$$

- On note les **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



Remarque :

Tous les calculs s'effectuent de la même manière qu'en géométrie plane, avec une troisième coordonnée.

Théorème : Premiers calculs dans un repère

Soient deux points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ de l'espace.

- Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont

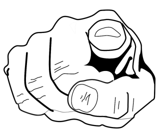
$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$

Remarque :

Quatre vecteurs de l'espace sont toujours linéairement dépendants. Au moins l'un d'entre eux s'obtient par **combinaison linéaire** des trois autres.

Exercice :



On se place dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{u}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des trois autres vecteurs.

II. Droites et Plans de l'espace

On se place maintenant dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

1. Direction d'une droite

Définition : Droite de l'espace

Soient A et B, deux points de l'espace.

La **droite** (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ où t un réel.

Théorème : Représentation paramétrique de droite

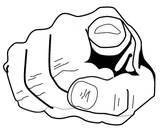
La droite d passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est l'ensemble des points

$M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \quad avec\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + tc \end{cases}$ C'est une **représentation paramétrique de d.**

Remarque :

Chaque droite a une infinité de représentations paramétriques (qui dépend de A et $\vec{u}$).

Exercice :



Soient $A(-1\,;0\,;1)$, $B(-5\,;-2\,;7)$

Ainsi, : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-2\\6\end{pmatrix}$

Deux représentations paramétriques de (AB) sont

$\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ $\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

$C(7\,;4\,;-11)$ appartient-il à (AB) ? ....

2. Direction d'un plan

Définition : Plan de l'espace

Soient A, B, C trois points non alignés. Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}, \quad \text{avec } t,\ t' \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Un plan est donc entièrement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Théorème : Représentation paramétrique d'un plan

Le plan $\mathscr{P}$ contenant $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ est l'ensemble des points

$M(x\,;y\,;z)$ tels que $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \quad \text{avec } t,\ t' \in \mathbb{R}. \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$ C'est une **représentation paramétrique de P.**

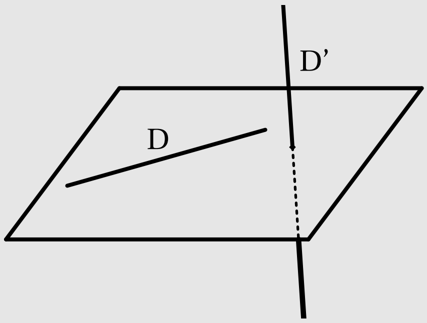
III. Intersection de droites et de plans

1. Positions relatives de deux droites dans l'espace

Théorème : Positions relatives de deux droites dans l'espace

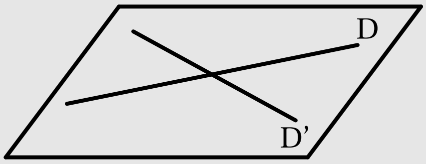
Deux droites de l'espace peuvent être coplanaires (dans un même plan) ou non-coplanaires.

Droites non coplanaires

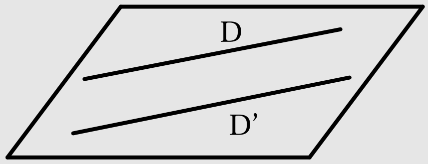


Droites coplanaires

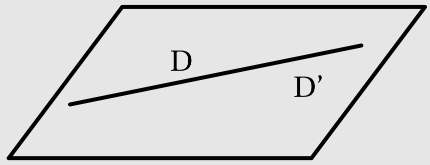
sécantes :



parallèles :



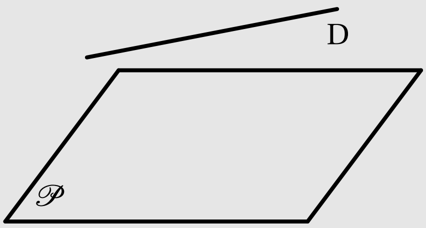
confondues :



2. Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

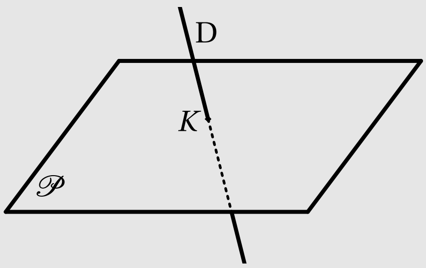
Théorème : Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace

Étant donnés une droite D et un plan $\mathscr{P}$, trois cas seulement sont possibles :



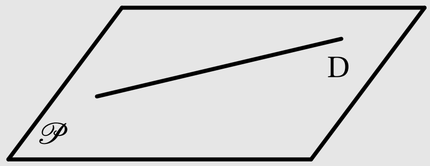
D et $\mathscr{P}$ sont **parallèles**

La droite et le plan n'ont aucun point commun.



D et $\mathscr{P}$ sont **sécants**

La droite et le plan se coupent en un point.



D est **incluse** dans $\mathscr{P}$.

La droite et le plan ont une infinité de points commun : la droite.

3. Positions relatives de deux plans dans l'espace

Avez-vous une idée ?

Les positions relatives entre plans seront étudiés dans la partie 2 du cours (en 2021)