Les équations de courbes

I. Équations de courbes

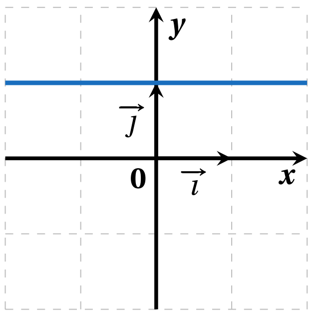
Définition :

Dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$, une équation de courbe $\mathscr{C}$ est une relation liant les coordonnées x et y de tous les points $M(x;y)$ de cette courbe.

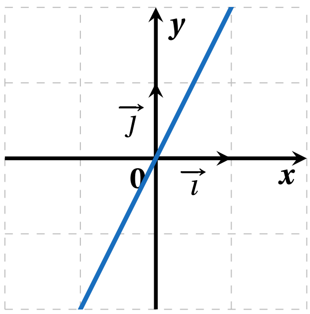
C'est comme une carte d'identité de cette courbe !

Exemples :

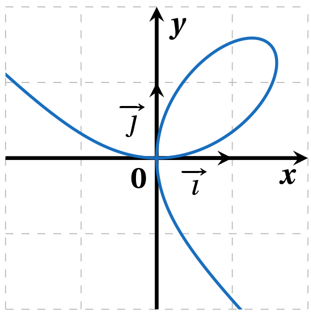
La droite horizontale contenant tous les points M d'ordonnée 1 a pour équation $y = 1$.



L'ensemble des points $M(x;y)$ dont l'ordonnée est le double de l'abscisse a pour équation $y = 2x$.



L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^3 + y^3 = 3xy$ est appelé le Folium de Descartes.



Définition :

Dire qu'un point $A(x_A;y_A)$ appartient à une courbe $\mathscr{C}$ dont on connait une équation signifie que les coordonnées de A vérifient cette équation.

Autrement dit, quand on remplace x et y par x_A et y_A dans l'équation de la courbe, alors l'égalité est vérifiée.

Exemples

- Le point $A\left(\sqrt{3}\,;0\right)$ appartient-il au Lemniscate de Bernoulli d'équation $\left(x^2+y^2\right)^2 = 3\left(x^2-y^2\right)$?

  ....

- Le point $B\,(1{,}5\,;\,1{,}5)$ appartient-il au Folium de Descartes d'équation $x^3+y^3=3xy$?

  ....

II. Équations de cercle

Définition :

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$.

Théorème :

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, le cercle de centre $\Omega\left(\alpha,\beta\right)$ et de rayon $r \geqslant 0$ a pour équation

$$\boldsymbol{(x-\alpha)^2+\left(y-\beta\right)^2=r^2}$$

Démonstration :

....

....

Remarque : Après développement, on obtient une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Exemples

- Le cercle de centre $\Omega(2\,;3)$ et de rayon 4 a pour équation :

  ....

  ....

  ....

- La courbe d'équation $x^2+y^2-6x+2y-5=0$ est-elle un cercle ? Si oui, préciser ses caractéristiques.

  ....

  ....

  ....

  ....

Remarque : On peut aussi définir un cercle par la donnée d'un diamètre.

Il faudra alors $\left\{\begin{array}{l}\text{déterminer son centre (milieu du diamètre donné)}\\ \text{déterminer son rayon (moitié de la longueur du diamètre)}\end{array}\right.$

Exemple : Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-3\,;-2)$ et $B(2\,;5)$

....

....

....

....

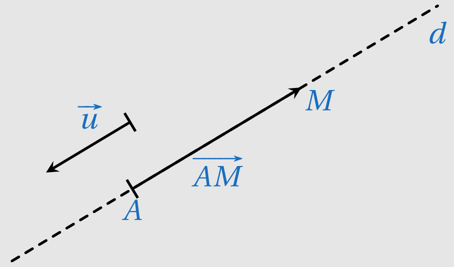
III. Équations de droites

1. Approche géométrique

Définition :

Soient A un point et $\vec{u} \neq \vec{0}$.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient *colinéaires* est la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



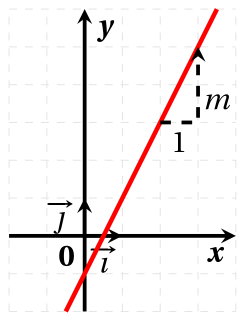
2. Équation de droite et coefficient directeur

Rappels :

Une droite du plan peut être caractérisée par une équation (dite réduite) de la forme :

- $\boldsymbol{x = c}$ si cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées (« verticale »)
- $\boldsymbol{y = mx + p}$ si cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

  On appelle alors m le **coefficient directeur** et p l'**ordonnée à l'origine**.



3. Équation de droite et vecteur directeur

Théorème : Voir démonstration

Toute équation de droite peut s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$ (équation cartésienne).

Un vecteur directeur est alors $\vec{u}\binom{-b}{a}$ ou tout autre vecteur non nul colinéaire à celui-ci.

Exemples

- Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d_1) d'équation $2x + 3y - 7 = 0$

  ....

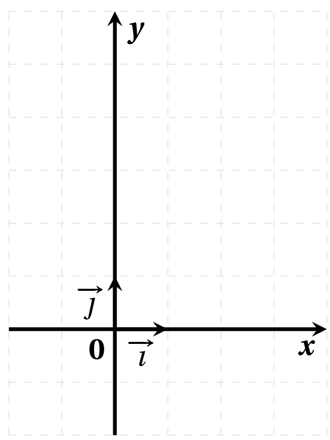
  Trouver un point appartenant à d puis tracer (d_1) dans le repère ci-dessous.

  ....

- Déterminer une équation de (d_2) passant par $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{5}$.

  ....

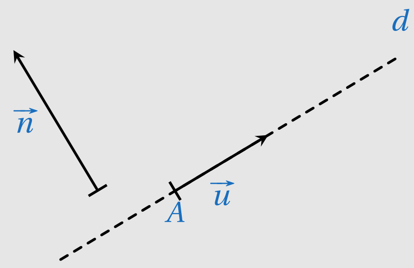
  ....



4. Équation de droite et vecteur normal

Définition :

On appelle vecteur *normal* à une droite d tout vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ *orthogonal* à un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.



Théorème :

Dans un repère orthonormal, dire que deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont *orthogonaux* est équivalent à

$$\boldsymbol{x\,x' + y\,y' = 0}$$

Exemples

- Les vecteurs $\vec{u}\binom{-2}{5}$ et $\vec{v}\binom{3}{1}$ sont-ils orthogonaux?

  ....

- Fabriquer un vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{u}\binom{-2}{3}$.

  ....

  ....

Théorème : Voir démonstration

Toute équation de droite peut s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$ (équation cartésienne).

Un vecteur normal est alors $\vec{n}\binom{a}{b}$ ou tout autre vecteur non nul colinéaire à celui-ci.

Exemples

- Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ de la droite d d'équation $3x + 2y + 6 = 0$

  ....

  Trouver un point appartenant à d puis tracer d dans le repère ci-dessous

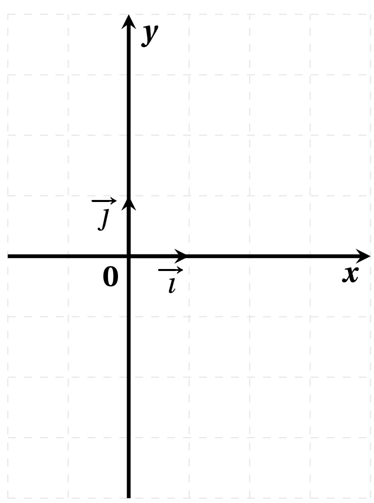
  ....

- Déterminer une équation de d passant par $A(1;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{-2}{1}$.

  ....

  ....

  ....



5. Droites remarquables

a) Droites remarquables dans le triangle

Définition :

- La **médiane** est une droite joignant un sommet et le milieu du coté opposé

  Les trois médianes sont concourantes. Leur point de concours est le **centre de gravité**

- La **médiatrice** est une droite perpendiculaire au segment en son milieu

  Les trois médiatrices sont concourantes. Leur point de concours est le **centre du cercle circonscrit**

- La **hauteur** est une droite partant d'un sommet du triangle et perpendiculaire au coté opposé

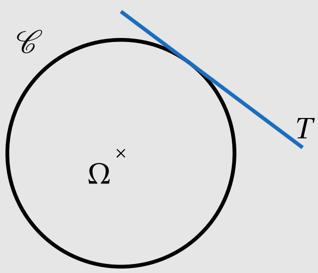
- Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est**l'orthocentre**

b) Tangente à un cercle

Définition :

Une tangente à un cercle $\mathscr{C}$ est une droite T qui possède un seul point d'intersection avec ce cercle.

Le point d'intersection est appelé le point de contact ou le point de tangence.

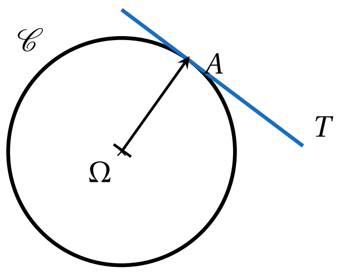


Théorème :

Si la droite T est tangente au cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω au point A, alors on a (ΩA) perpendiculaire à T.

Autrement dit $\overrightarrow{\Omega A}$ est orthogonale à un vecteur directeur de T.

Ou encore, $\overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur *normal* à T.



Exemples

- Montrer que $A(4\,;5)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1\,;1)$ et de rayon 5.

  ....

- Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

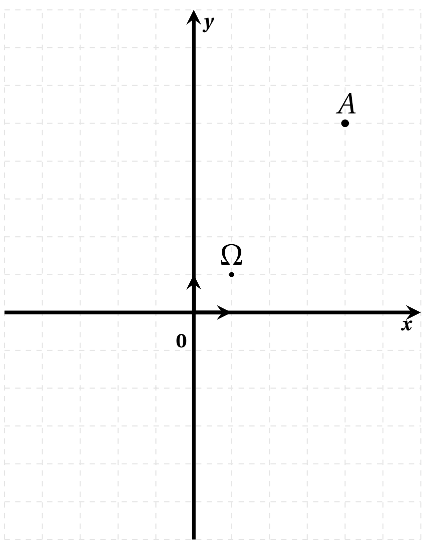
  ....

  ....

- Déterminer une équation de la médiatrice de $[A\Omega]$.

  ....

  ....



Bilan sur les droites :

- La donnée d'un point et d'un vecteur directeur définit de manière unique la droite (d).
- Si A et B sont 2 points de la droite (d) alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d).
- Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors $k\,\overrightarrow{u}$ $(k \neq 0,)$ est un vecteur directeur de (d).

Exemple 1 : On cherche (d_1) passant par $A(4\,;8)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

....

....

Exemple 2 : On cherche (d_2) passant par $A(4\,;8)$ et $B(6\,;9)$

....

....

- La donnée d'un point et d'un vecteur normal définit de manière unique la droite (d)

Exemple 3 : On cherche (d_3) passant par $A(4\,;8)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

....

....

- Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple 4 : On cherche (d_4) passant $A(1\,;7)$ et parallèle à (d) d'équation $2x-5y+1=0$.

....

....

....

....

- Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exemple 5 : On cherche (d_5) passant par $A(1\,;7)$ et perpendiculaire à (d) d'équation $2x-5y+1=0$.

....

....

....

....

Bilan sur les intersections de courbes :

Chaque courbe étant caractérisée par son équation, le point d'intersection de deux courbes doit vérifier les deux équations (quelles qu'elles soient)

- Le point d'intersection de deux droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ a pour coordonnées les solutions du système (S_1) : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Exemple 1 : (d_1) d'équation $6x+5y-7=0$ et (d_2) d'équation $3x-2y+10=0$

On cherche le point d'intersection de ces deux droites :

....

....

....

....

....

....

....

- Le point d'intersection d'une droite d'équation $ax+by+c=0$ et d'un cercle d'équation $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0=0$ a pour coordonnées les solutions du système (S_2) : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Exemple 2 : On cherche le(s) point(s) d'intersection de la droite (d_1) d'équation $3x+5y+26=0$ et du cercle $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation $x^2+y^2-6x-8=0$

....

....

....

....

....

....

....

....

- Le point d'intersection de deux cercles d'équations respectives $x^2+y^2+ax+by+c=0$ et $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ a pour coordonnées les solutions du système $(S_3)\ :\ \begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Exemple 3 : On cherche le(s) point(s) d'intersection du cercle $(\mathscr{C}_1)$ d'équation $x^2+y^2-10x-4y+4=0$ et du cercle $(\mathscr{C}_2)$ d'équation $x^2+y^2-2x+4y-12=0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....