Comment évaluer une grandeur (longueur, aire...) ?

Retour sur les suites

Exercice 1

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$.

   Exprimer le plus simplement possible u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2n - (-1)^n n$.

   Exprimer le plus simplement possible v_{2n} et v_{2n-1} en fonction de n.

Limites de suites et sommes des termes

Exercice 2

Calculer la limite des suites ci-dessous en $+\infty$:

1. $u_n = n^2 - 4n + 1$
2. $v_n = \dfrac{3n^2 - 4n + 1}{2n^2 + n - 5}$
3. $w_n = \dfrac{2\sin n}{n+1}$
4. $t_n = \dfrac{2020 \times (-1)^n}{3n - 10}$

Exercice 3

Calculer la limite des suites ci-dessous en $+\infty$:

1. $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $z_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n-4} - \sqrt{2n+1}}$

Exercice 4

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison -5.

   Déterminer u_n en fonction de n. En déduire les variations et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 2.

   Déterminer u_n en fonction de n. En déduire les variations et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. $w_n = 5 - 2n + 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Quelle est la limite de (w_n) ? et ses variations ?

Exercice 5

La légende raconte qu'un roi de Perse voulut récompenser l'inventeur du jeu d'échec.

Après avoir réfléchi, ce dernier lui proposa :

Vous déposez un grain de blé sur la première case du jeu, puis deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et vous doublez le nombre de grains en passant d'une case à une autre.

Ce n'est pas une grosse récompense lui répondit le roi. Qu'en penser ?

Aide : Un jeu d'échec comporte 64 cases.

Un grain de blé pèse environ 40mg.

La production annuelle mondiale de blé en 1999 était de 580 millions de tonnes.

Exercice 6

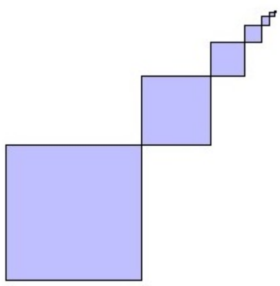
1. $\dfrac{22}{7}$ est-il un nombre décimal ? Pourquoi ? $\dfrac{22}{7}$ est-il un nombre rationnel ? Pourquoi ?
2. $0{,}27272727... = 0{,}\overline{27}$ est-il un nombre décimal ? un nombre rationnel ?

   Aide : On pourra écrire ce nombre sous la forme d'une somme à calculer.

Exercice 7

Des carrés sont disposés « indéfiniment » en alignant l'une de leur diagonale comme sur la figure ci-contre.

Les carrés ont pour côtés respectifs 1 ; 0,5 ; 0,25 ; . . .

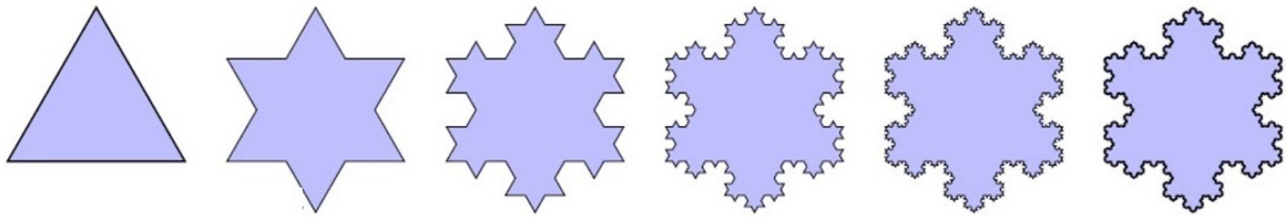


1. Est-ce que l'on peut inscrire la figure obtenue dans un carré ?
2. La somme des aires des carrés a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?
3. Peut-on, en changeant uniquement le facteur de réduction d'un carré au suivant inscrire la figure finale dans un carré de côté a (où a donné) ?

Exercice 8 – Flocon de Von Koch

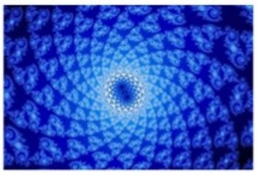
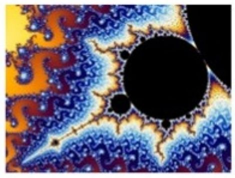
Voici les six premières étapes de construction du flocon de VON KOCH (le 1^{er} triangle est équilatéral de côté 1).

1. Expliquer la construction.



2. Déterminer le périmètre et l'aire des 4 premières étapes.

3. Que dire alors du périmètre et de l'aire de l'objet fractal (après une infinité d'itérations) ?

`https://www.youtube.com/watch?v=PKbwrzkupaU`

Principe de récurrence

Exercice 9

Soit (P_n) la propriété : 4^n+1 est multiple de 3.

1. Démontrer que la propriété (P_n) est héréditaire.

   Les entiers de la forme 4^n+1 où n est un entier naturel sont ils toujours multiples de 3 ?

2. n désigne un entier naturel. Démontrer que les entiers 4^n+5 sont tous multiples d'un même entier.

Exercice 10

Démontrer par récurrence les trois propriétés suivantes :

1. (P_1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. (P_2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. (P_3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ c'est à dire $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$

Exercice 11

Démontrer par récurrence que $4^{n+1}+6n+5$ est divisible par 9 pour tout entier naturel n.

Exercice 12

Soit n un entier naturel. Soient : $(P_1) : 3^{4n} - 1$ est un multiple de 5 $\qquad (P_2) : 3^{4n} + 1$ est un multiple de 5.

1. Démontrer que les propriétés (P_1) et (P_2) sont héréditaires.

2. Les propriétés précédentes sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

   a Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b Écrire alors v_n en fonction de n. Déterminer la limite de la suite (v_n).

   c Écrire u_n en fonction de n. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 14

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

Rappel : pour tout entier $n \geqslant 1$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+2} + 3$.

Exercice 16

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 6u_n + 4 \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est à termes positifs

2. Que se passe t-il si $u_0 = -2$? si $u_0 = -0.8$?

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Que peut-on déduire ?

Exercice 18

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{4u_n + 4}$

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{4x+4}$.

1. Étudier les variations de f.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$