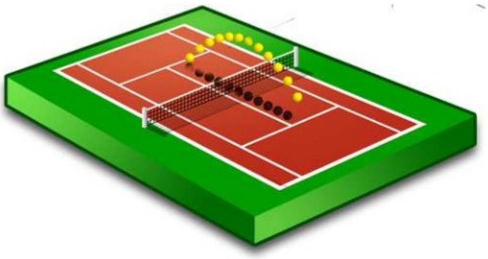
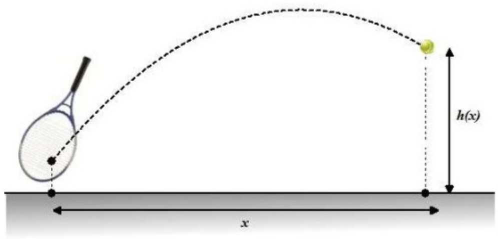
Étude 3 : Résoudre des équations du second degré

Deux joueurs A et B s'affrontent sur un cours de tennis. Sur un coup de son adversaire, le joueur A reprend la balle près du sol et tente une « volée amortie ».

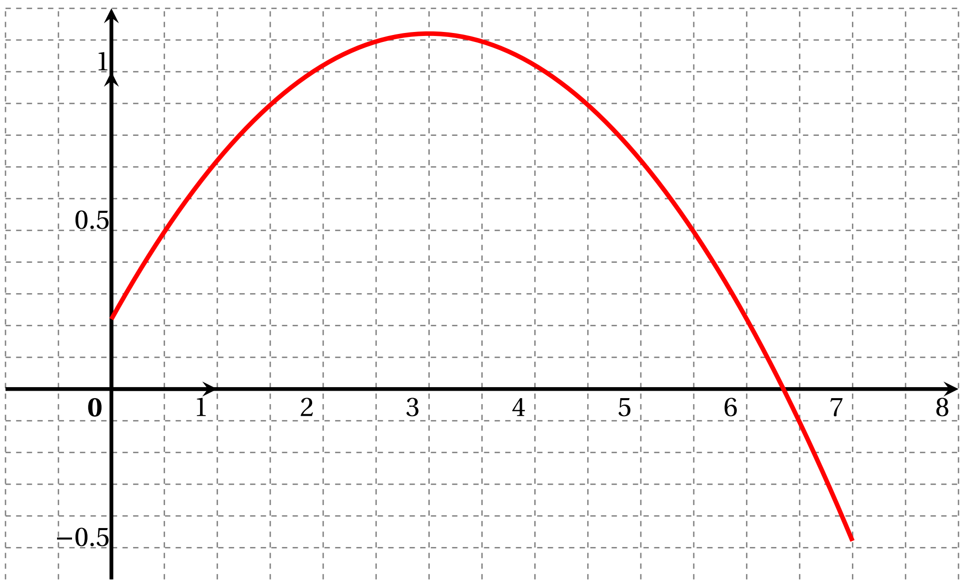




On considère que la hauteur de la balle en mètres, en fonction du nombre x de mètres parcourus au sol est donné (à partir de $x = 0$ et tant que la balle ne retombe pas au sol) par la fonction h définie par : $h(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}6x + 0{,}2202409$.

On négligera le rayon de la balle, c'est-à-dire qu'on suppose qu'elle est réduite à un point.

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;7]$.



Partie 1 : Lecture graphique

Répondre aux deux questions suivantes **par lecture graphique** :

1. À quelle distance de l'endroit où elle a frappée, la balle devrait retomber au sol ?
2. Quelle sera la hauteur maximale atteinte par la balle ?

Partie 2 : Calculs

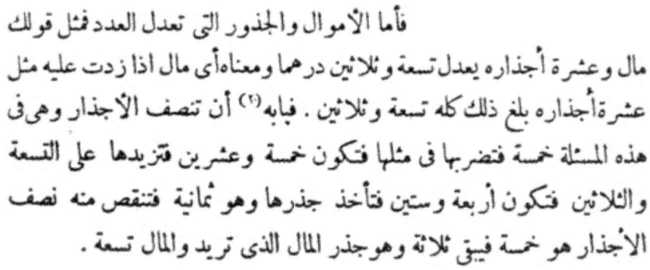
1. Calculer $h(0)$. Que représente cette valeur pour le joueur A ?
2. Le filet est situé 4 mètres après le point de départ de la balle et a une hauteur de 95 cm.

   Déterminer si la balle passera le filet.
3. Nadia essaye de résoudre l'équation : $-0{,}1x^2 + 0{,}6x + 0{,}2202409 = 0$.

   Si elle y parvient, à quelle question pourra-t-elle répondre ? Y parviendrez-vous ?

Étude 3 (suite) : Résoudre des équations du second degré

Les savants arabes dont Al-Khwarizmi (vers 830) sont les premiers à proposer une classification des équations du second degré et une méthode pour leur résolution. En voici un exemple.



فأما الأموال والجذور التى تعدل العدد فمثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أى مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه[٢] أن تنصف الأجذار وهى فى
هذه المسئلة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة .

Une traduction du probléme est

« Que le carré et dix racines égalent 39 unités. »

ou encore, avec les notations actuelles : « Résoudre : $x^2 + 10x = 39$ »

Al-Khwarizmi propose dans le texte ci-dessus une méthode géométrique de résolution. Nous allons passer par le calcul…

1. Compléter l'**identité remarquable** suivante : $(x + \ldots)^2 = x^2 + 10x + \ldots$

2. En déduire : $x^2 + 10x = (x + \ldots)^2 - \ldots$.

3. En remplaçant le membre de gauche, résoudre l'équation : $x^2 + 10x = 39$.

4. En utilisant la même technique, résoudre les équations suivantes :

- **a)** $x^2 + 6x = 16$
- **b)** $x^2 + 2x + 4 = 0$
- **c)** $x^2 - 14x = 39$.

5. Justifier que les deux équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} -0{,}1x^2 + 0{,}6x + 0{,}2202409 &= 0 \\ x^2 - 6x - 2{,}202409 &= 0 \end{aligned}$$

6. Résoudre alors l'équation : $-0{,}1x^2 + 0{,}6x + 0{,}2202409 = 0$.

7. Répondre alors à la question que pouvait se poser Nadia pour le tennis.

On n'utilisera pas en première la méthode d'Al-Khwarizmi. Cependant, cette méthode permettra de démontrer la méthode générale suivante :

Pour résoudre une équation du type : $ax^2 + bx + c = 0 \ldots$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$. Δ se lit : « *Delta* ». C'est le **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

- ∗ si $\mathbf{\Delta < 0}$: il n'y a pas de solution.
- ∗ si $\mathbf{\Delta = 0}$: il n'y a qu'une seule solution, dite double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \alpha$.
- ∗ si $\mathbf{\Delta > 0}$: il y a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

8. Appliquer la méthode générale de résolution des équations du second degré ci-dessus à l'équation :

$$-0{,}1x^2 + 0{,}6x + 0{,}2202409 = 0$$