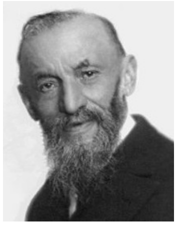
Cours : le principe de récurrence

Deux mathématiciens sont régulièrement cités lors de l'évocation du principe de récurrence. Ils ont vécu en fin de XIXe et début du XXe siècle.

Giuseppe PEANO



Henri POINCARE

I. Récurrence

Définition : On note $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n .

Exemples :

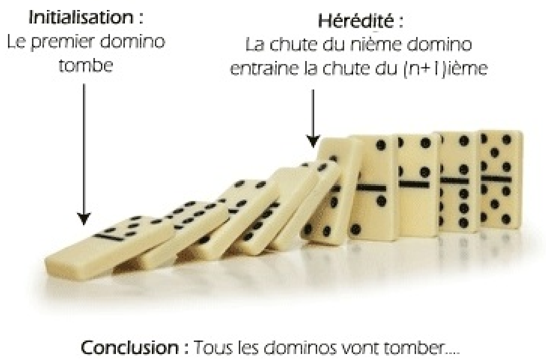
- $\sum_{i=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11
- $u_n < 5$

Pour démontrer qu'une telle propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, on peut utiliser un raisonnement mathématique spécifique appelé **raisonnement par récurrence**. Il est composé de trois étapes :

- **Étape 1 : Initialisation**

  La propriété est satisfaite pour un entier n_0

  $P(n_0)$ est vraie



- **Étape 2 : Hérédité**

  Il s'agit de démontrer que si la propriété est vraie au rang N alors elle est vraie au rang suivant $N+1$

  Si $P(N)$ est vraie alors $P(N+1)$ est vraie

- **Étape 3 : Conclusion**

  Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels.

  Si $P(n)$ peut être initialisée pour n_0 et est héréditaire alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$

Remarque :

Comme il est souvent faux de passer des cas particuliers au cas général, la récurrence doit être conduite avec rigueur, en respectant les étapes du raisonnement.

II. Deux exemples

1. Pour démontrer une égalité

La proposition à démontrer (notée $P(n)$) :

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2} \qquad \text{(somme des entiers naturels)}$$

La démonstration par récurrence :

- **Étape 1 : Initialisation**

  Pour $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} i = 0$ et $= \frac{(0+1)0}{2} = 0$ $P(0)$ est vraie.

- **Étape 2 : Hérédité**

  Supposons que pour un entier donné N, la propriété soit vraie : $\sum_{i=0}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$.

  Montrons alors que la propriété est vraie au rang $N+1$ c'est à dire que $\sum_{i=0}^{N+1} i = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N+1} i &= (0+1+2+\ldots+N)+N+1 \\
&= \left(\sum_{i=0}^{N} i\right)+N+1 \\
&= \frac{N(N+1)}{2}+N+1 \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{N(N+1)}{2}+\frac{2(N+1)}{2} \\
&= \frac{N(N+1)+2(N+1)}{2} \\
&= \frac{(N+1)(N+2)}{2}
\end{aligned}$$

  $P(n)$ est héréditaire

- **Étape 3 : Conclusion**

  $P(0)$ est vraie et si $P(N)$ est vraie alors $P(N+1)$ est vraie ;

  Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Voici une vidéo qui reprend ce qui précède :

`http://www.jaicompris.com/lycee/math/suite/suite-recurrence.php`

2. Pour démontrer une inégalité (inégalité de Bernoulli)

La proposition à démontrer (notée $P(n)$) :

$$\text{Pour tout } a > 0, \text{et pour tout entier naturel } n,\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

La démonstration par récurrence :

- **Etape 1 : Initialisation**

  Pour $n = 0$: $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$

  On a donc bien $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0a$ — $P(0)$ est vraie.

- **Étape 2 : Hérédité**

  Supposons que pour un entier donné N, la propriété soit vraie : $(1+a)^N \geqslant 1 + Na$.

  Montrons alors que la propriété est vraie au rang $N+1$ c'est à dire que $(1+a)^{N+1} \geqslant 1 + (N+1)a$

  $$
  \begin{array}{lll}
   & (1+a)^N \geqslant 1 + Na & \text{hypothèse de récurrence} \\
  \Leftrightarrow & (1+a)^N(1+a) \geqslant (1+Na)(1+a) & \text{car } 1+a > 0 \\
  \Leftrightarrow & (1+a)^{N+1} \geqslant (1+Na)(1+a) & \\
  \Leftrightarrow & (1+a)^{N+1} \geqslant 1 + a + Na + Na^2 & \\
  \Leftrightarrow & (1+a)^{N+1} \geqslant 1 + (N+1)a + Na^2 & \\
  \Leftrightarrow & (1+a)^{N+1} \geqslant 1 + (N+1)a & \text{car } Na^2 \geqslant 0
  \end{array}
  $$

  $P(n)$ est héréditaire

- **Etape 3 : Conclusion**

  $P(0)$ est vraie et si $P(N)$ est vraie alors $P(N+1)$ est vraie ;

  Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

On est désormais en mesure de justifier la limite d'une suite géométrique (admise dans le cours précédent) :

Théorème :

- Si $q > 1$ alors (q^n) diverge vers $+\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors (q^n) converge vers 0.