Cours : les suites numériques

I. Définition d'une suite

1. Définition

Définition :

Définir une suite, c'est associer à tout entier naturel n un nombre noté u_n. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

Mode de génération d'une suite :

- **Par une formule explicite :**

  Chaque terme u_n de la suite (u_n) est défini en fonction de son rang n, indépendamment des autres termes.

  Exemple : $u_n = 2n - \sqrt{n}$

- **Par une formule récurrente :**

  Ces suites sont définies par leur(s) premier(s) terme(s) et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f désigne une fonction.

  Exemple : $u_{n+1} = 1 + 2\sqrt{u_n}$

Remarque : D'autres suites récurrentes font intervenir deux, trois... termes précédents.

Exemple : La suite de FIBONACCI : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

2. Suites particulières

Soit (u_n) une suite et r et q des réels.

1. **Suites arithmétiques :**

- Définition par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

- Définition explicite :

  $u_n = u_0 + n \times r$

  $u_n = u_1 + (n-1) \times r$

- Somme des termes : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} u_i = \frac{(1^{er}\text{terme} + \text{dernier terme}) \times (\text{nbre de termes})}{2}$

  Exemple : somme des entiers $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Suites géométriques :

- Définition par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$$

- Définition explicite :

$u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

- Somme des termes (pour $q \neq 1$) : $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} u_i = 1^{er}\text{terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

  Exemple : somme géométrique $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

II. Variation d'une suite

1. Définitions

Définition :

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$

1. Dire que (u_n) est **croissante** signifie que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Dire que (u_n) est **décroissante** signifie que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. Dire que (u_n) est **constante** signifie que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques :

- On définit aussi les notions de croissance et décroissance stricte.
- Dire que u est **monotone** signifie que u est soit croissante, soit décroissante

2. Cas particuliers

Théorème 1 : Pour une suite arithmétique de raison r :

- (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$
- (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$
- (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$

Théorème 2 : Pour une suite géométrique de raison $q \neq 0$ avec $u_0 > 0$ (Si $u_0 < 0$, tout est inversé).

- la suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $q > 1$
- la suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$
- la suite (u_n) est constante si et seulement si $q = 1$
- la suite (u_n) n'est pas monotone si et seulement si $q < 0$

Remarques :

1. Pour une suite définie par $u_n = f(n)$ (de manière explicite)

   Les variations de la suite (u_n) correspondent aux variations de la fonction f

2. Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ (par récurrence)

   Les variations de la fonction ne correspondent pas toujours aux variations de la suite.

   Il faudra une étude plus approfondie.

III. Comportement asymptotique d'une suite

1. Suites de limite finie

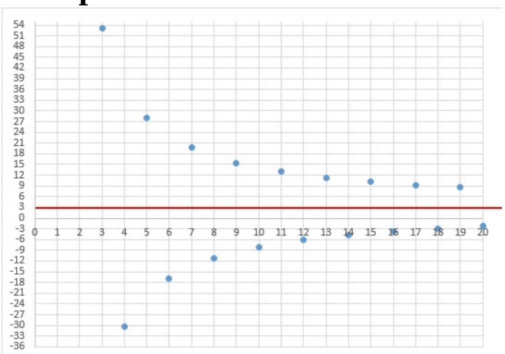
Définition :

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel.

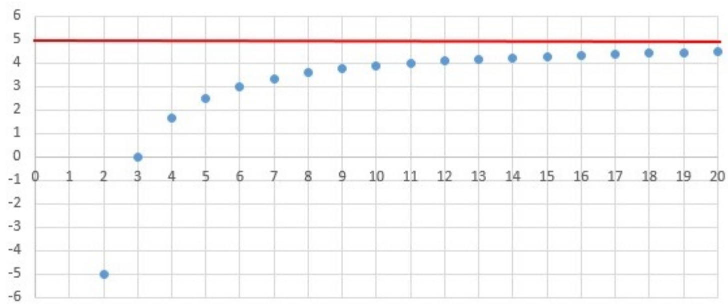
On dit que la suite (u_n) admet ℓ pour **limite** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit lors que (u_n) est **convergente** et converge vers ℓ. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Exemple 1 :



Exemple 2 :



Remarque : Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples : C'est le cas de la suite $(u_n) = (-1)^n$ ou de la suite $v_n = n^2$

Théorème 3 : Si une suite admet une limite réelle alors cette limite est unique.

Théorème 4 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers les réels ℓ_1 et ℓ_2.

1. Si la suite (u_n) est croissante alors $u_n \leqslant \ell_1$.

2. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Théorème 5 (dit des gendarmes) :

Soit (v_n) et (w_n) des suites convergeant vers le même réel ℓ.

Si (u_n) est une suite telle que, à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = \ell$.

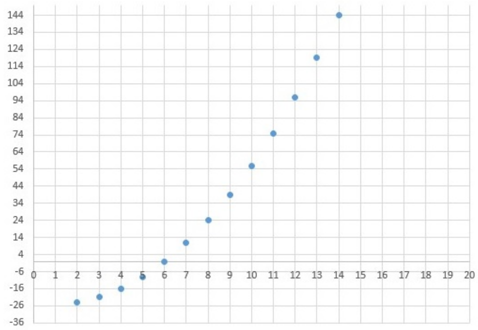
2. Suites de limite infinie

Définitions :

Soit (u_n) une suite. Soient A et B deux réels.

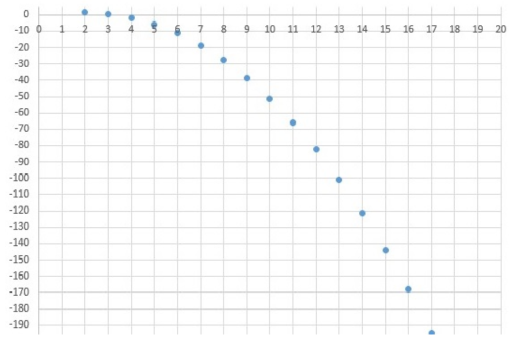
1. On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** $+\infty$ si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

   On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$



2. On dit que la suite (u_n) admet pour **limite** $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty[;B$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

   On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$



Théorème 6 :

Soit (u_n) et v_n deux suites.

1. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Limite d'une somme $u_n + v_n$:

(v_n) \ (u_n)	a	$+\infty$	$-\infty$	0
b				
$+\infty$				
$-\infty$				
0				

Limite d'un inverse :

Limite de (u_n)	$a \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
Limite de $\dfrac{1}{u_n}$					

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 + 3n^3\right) = \ldots$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+5}\right) = \ldots$

Limite du produit $u_n \times v_n$:

$(v_n) \backslash (u_n)$	$a>0$	$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$b>0$					
$b<0$					
$+\infty$					
$-\infty$					
0					

Limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$:

$(v_n) \backslash (u_n)$	$a>0$	$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$b>0$					
$b<0$					
$+\infty$					
$-\infty$					
0^+					
0^-					

4. Limites de références

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (n) =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2) =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\right) =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^p}\right) =$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) =$ avec $q > 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n}\right) =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n^p\right) =$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) =$ avec $-1 < q < 1$

5. Que faire dans le cas d'une Forme Indéterminée ?

Méthode 1 :

Dans le cas d'une forme indéterminée du type $(+\infty) + (-\infty)$, on factorise par le terme de plus haut degré :

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^3 - 3n - 1 =$

Méthode 2 :

Dans le cas d'une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$" ou "$\dfrac{(+\infty)}{(-\infty)}$", on utilise la même méthode sans oublier de simplifier pour lever l'indétermination.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 - 3n - 1}{4n^3 + 2} =$