Cours : Fonctions du second degré

I. Fonctions de degré 2

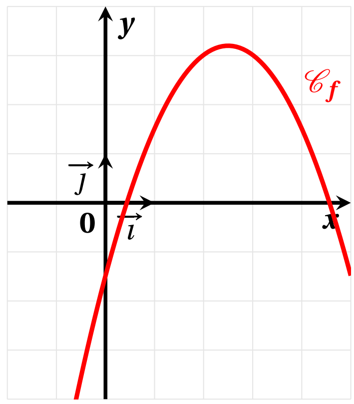
1. Qu'est-ce que c'est ?

Définition

Une fonction de degré 2 (ou du second degré) est une fonction qui peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$, b et c des réels. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.



Théorème

La courbe représentative d'une fonction de degré 2 est **une parabole**.

Cette courbe a pour équation $y = ax^2 + bx + c$.

2. Les différentes formes des fonctions de degré 2

Une fonction de degré 2 peut s'écrire sous 3 formes différentes.

- **Forme développée d'une fonction de degré 2**

Définition

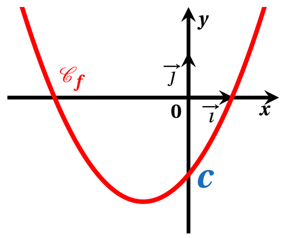
La forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, b et c des réels est appelée la forme **développée** d'une fonction de degré 2.

Théorème

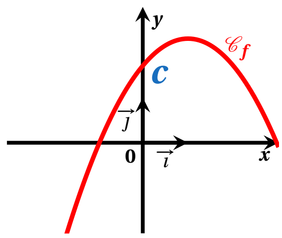
- On a $f(0) = c$.

  Ainsi, la valeur de c se lit à l'intersection de la parabole et de l'axe des ordonnées.

- Si $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut.



- Si $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas.



- **Forme canonique d'une fonction de degré 2**

Définition

On appelle **forme canonique** d'une fonction de degré 2 l'écriture sous la forme

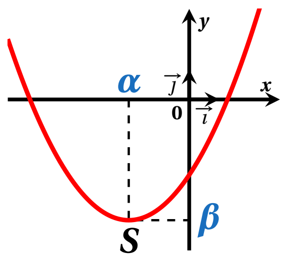
$$\boldsymbol{f(x) = a\,(x-\alpha)^2+\beta}$$

avec α et β des réels.

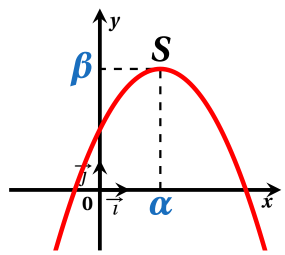
Remarque : Cette écriture existe toujours ; elle est unique et on apprendra à la déterminer.

Théorème

Le sommet $\boldsymbol{S}$ de la parabole a pour coordonnées $(\boldsymbol{\alpha\,;\beta})$, avec $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$.



Si $\boldsymbol{a>0}$



Si $\boldsymbol{a<0}$

- **Forme factorisée d'une fonction de degré 2 (si elle existe)**

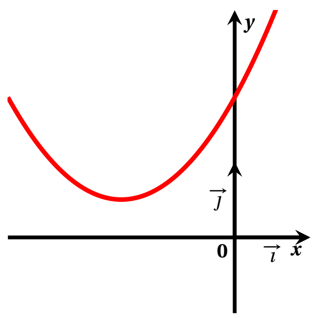
Définition

Lorsqu'elle existe dans $\mathbb{R}$, on appelle **forme factorisée** d'une fonction de degré 2 toute écriture sous la forme

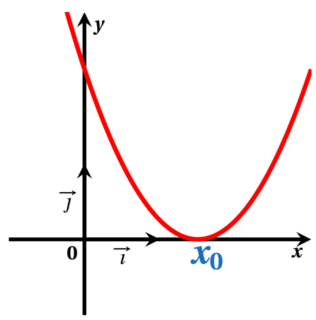
$$\boldsymbol{f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)} \text{ ou } \boldsymbol{f(x) = a\,(x-x_0)^2}$$

avec x_0, x_1 et x_2 des réels.

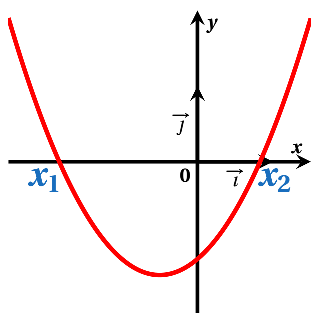
Graphiquement



Pas de factorisation possible dans $\mathbb{R}$



$\boldsymbol{f(x) = a\,(x-x_0)^2}$



$\boldsymbol{f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)}$

Définition

On appelle **racine** d'une fonction f de degré 2 tout nombre x tel que $f(x)=0$.

Remarque : Les racines réelles éventuelles d'une fonction de degré 2 sont simples à déterminer à partir de la forme factorisée ou à lire de manière approchée avec la représentation graphique.

II. Forme canonique : fabrication / applications

Théorème

Considérons la fonction de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors la forme canonique de f est $\boldsymbol{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$ avec

$$\boldsymbol{\alpha = -\frac{b}{2a}} \text{ et } \boldsymbol{\beta = f(\alpha)} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

1. Variations et extrema

Théorème

On considère une fonction de degré 2, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $\boldsymbol{a > 0}$

La fonction f admet un *minimum*
lorsque $\boldsymbol{x = \alpha = -\frac{b}{2a}}$ et
ce *minimum* est égal à $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	β	$\nearrow$

f est décroissante lorsque $x \in]-\infty ; \alpha]$

f est croissante lorsque $x \in [\alpha ; +\infty[$

Si $\boldsymbol{a < 0}$

La fonction f admet un *maximum*
lorsque $\boldsymbol{x = \alpha = -\frac{b}{2a}}$ et
ce *maximum* est égal à $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	β	$\searrow$

f est croissante lorsque $x \in]-\infty ; \alpha]$

f est décroissante lorsque $x \in [\alpha ; +\infty[$

a) Exemple

On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 9x + 1$.

Déterminer α, puis β afin de dresser le tableau de variation de f puis d'écrire la forme canonique de f.

III. Forme factorisée : fabrication / applications

1. Comment fabriquer la forme factorisée d'une fonction de degré 2 ?

On utilise le forme canonique déterminée en classe :

En notant $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,c}$, on a $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$.
L'idée principale consiste à essayer d'utiliser l'identité remarquable

$$A^2 - B^2 = (A+B)\,(A-B)$$

- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = a\,(x-x_0)^2$, si on note $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$ et ne peut donc pas être un réel au carré.
  On ne peut pas factoriser f dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et on a $f(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$.
  $f(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$, si on note

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

Théorème

On considère la fonction de degré 2 suivante : $\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$.

On appelle **discriminant** le nombre $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,c}$.

- Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, alors la f ne possède pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.
- Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, alors $\boldsymbol{f(x) = a\,(x-x_0)^2}$ avec $\boldsymbol{x_0 = \dfrac{-b}{2\,a}}$.
- Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, alors alors $\boldsymbol{f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)}$ avec

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\,a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\,a}}$$

2. Résolution de $\boldsymbol{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$

En utilisant la forme factorisée et la **règle du produit nul**, on peut résoudre de manière générale les équations de la forme $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Théorème

On considère l'équation de degré 2 suivante : $\boldsymbol{a x^2 + b x + c = 0}$.

Le signe du **discriminant** $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ permet de connaître le nombre de solutions.

- Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle, $\boldsymbol{x_0 = \frac{-b}{2a}}$.
- Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles,

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

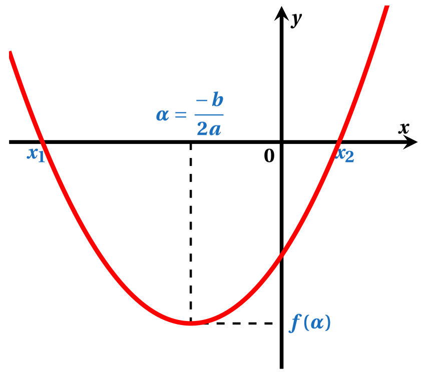
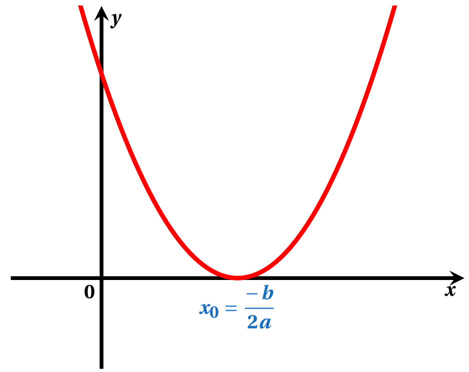
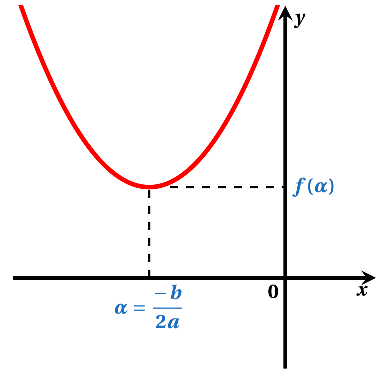
Remarque : Si $c = 0$ ou si $b = 0$, il est inutile d'utiliser ces formules !

a) Exemples

- Résoudre $3x^2 - 7x + 2 = 0$.
- Résoudre $3x^2 - 1 = 0$.
- Résoudre $7x^2 - 3x = 0$.
- Résoudre $3x^2 - 7x + 2 = 1$.

Bilan sur le second degré

On considère la fonction $\boldsymbol{f(x) = a x^2 + b x + c}$

		$\boldsymbol{\Delta > 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta < 0}$
Équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$		2 solutions x_1 et x_2 $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	une solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	pas de solution dans $\mathbb{R}$
Factorisation de $\boldsymbol{f(x)}$		$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-x_0)^2$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
a > 0	**Courbes**			
a < 0	**Courbes**