Les fonctions exponentielles
Exercices

Les propriétés de la fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4$
- $B = \dfrac{\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}^2}$
- $C = \dfrac{\mathrm{e}^{5x+7} \times \mathrm{e}^{-x-3}}{\mathrm{e}^{2x+3}}$
- $D = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}}$
- $E = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-4}$
- $F = \dfrac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}}$
- $G = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x}$
- $H = \left(e^{3x+2}\right)^2$
- $I = e^{2x+1} \times e^{-3x+5}$
- $J = \dfrac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}}$
- $K = \dfrac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \dfrac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}}$

Exercice 2

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{x+1}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$

2) Montrer que pour tout réel x, on a : $1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$

3) Justifier que pour tout réel x on a $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Exercice 3

Développer et simplifier les expressions suivantes :

- $A = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 5)$
- $B = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)$
- $C = \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$
- $D = (\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x + 5)$
- $E = (\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^{-x} + 3)$
- $F = (\mathrm{e}^x + 1)(2 - \mathrm{e}^{-x})$
- $G = (\mathrm{e}^x - 2)^2$
- $H = (\mathrm{e}^x + 1)^2$
- $I = (\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 3)$

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$

Démontrer que $f(x) + f(-x) = 2$

Equations et inéquations avec des exponentielles

Exercice 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^x = 1$ b) $e^x = 0$ c) $e^x + 1 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^{4x} = e^{5x-1}$ b) $e^{4x^2} = e^{36}$ c) $e^{2x-3} = 1$ d) $e^{5x} = \dfrac{e^{-x}}{e}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $(3x-5)(e^x+2) = 0$ b) $4e^{-x} + 7xe^{-x} = 0$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^2 + 6X - 7 = 0$

   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   a) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ b) $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$

Exercice 6

1) a) Démontrer que pour tout réel x, $-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x+1)(1-e^x)$

   b) Compléter le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$ .. $+\infty$
Signe de $2e^x + 1$	
Signe de $1 - e^x$	
Signe de $-2e^{2x}+e^x+1$	

2) Étudier le signe de l'expression $(2x+6)e^{x^2+6x+2}$.
   On complètera le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$ .. $+\infty$
Signe de $2x + 6$	
Signe de e^{x^2+6x+2}	
Signe de $(2x+6)e^{x^2+6x+2}$	

Calculer une dérivée (gratuitement.... pour le plaisir !)

Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2e^x$
- $g(x) = 2x + e^x$
- $h(x) = e^{2x+1}$
- $i(x) = (x^2 + 3\,x + 5)\,e^x$.
- $j(x) = \dfrac{4\,e^x}{e^x + 1}$.
- $k(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{e^x}$.
- $l(x) = 10e^{-0{,}5x+1}$.
- $m(x) = (2x-3)e^{-0{,}1x}$.
- $n(x) = e^{-x^2+x}$.

Étudier une fonction

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse :

1) Le point $A(0\,;\,1)$ appartient la courbe $\mathscr{C}$.
2) Pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$
3) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-1{,}5$ est horizontale.
4) La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
5) La fonction est positive sur $\mathbb{R}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - 8\,x)\,\mathrm{e}^{-2\,x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0.
3) Pour quelle valeur de x, $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 10

La fonction f qui à l'altitude x en kilomètres, associe la pression atmosphérique en hectopascals est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12x}$$

1) Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variations de f.
2) En 1648, Blaise Pascal et Florin Périer mesurent la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.
   Dans quel baromètre la hauteur de mercure était-elle la plus petite ?

Exercice 11

Un parachutiste de 80 kg est lâché avec une vitesse initiale nulle à 5 000 mètres d'altitude.
On considère la fonction v qui, à tout instant t positif (en s), associe la vitesse (en m.s^{-1}) du parachutiste à cet instant.
On suppose que tant que le parachute n'est pas ouvert, $v(t) = 44\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)$

1) Étudier le signe de $44 - v(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2) En déduire une vitesse en m.s^{-1}, puis en km.h^{-1}, que ne peut pas dépasser ce parachutiste pendant sa chute, même s'il n'ouvre pas son parachute.

Exercice 12

Une brioche qui était dans une étuve à 30 °C est placée dans un four chauffé à 180 °C pendant 35 minutes. La température au cœur de la brioche, exprimée en degrés Celsius, est donnée sur l'intervalle $[0\,;\,35]$ par une fonction du temps t, exprimé en minutes, de la forme $f(t) = a\mathrm{e}^{-0,022t} + 180$

1) Sachant que $f(0) = 30$, déterminer la valeur de a.
2) *a*) Justifier que $f'(t) = 3{,}3\mathrm{e}^{-0,022t}$ pour tout $t \in [0\,;\,35]$
   b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,35]$.
   c) Interpréter ce tableau de variations dans le contexte de l'exercice.
3) A l'aide d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire, en minutes, pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100 °C.

Exercice 13

On s'intéresse à la croissance d'une ville depuis le 1er janvier 2019.
On modélise l'évolution de sa population par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-0,05x}}$$

, où $f(x)$ est le nombre d'habitants, en centaines de milliers, au 1er janvier 2019+x.

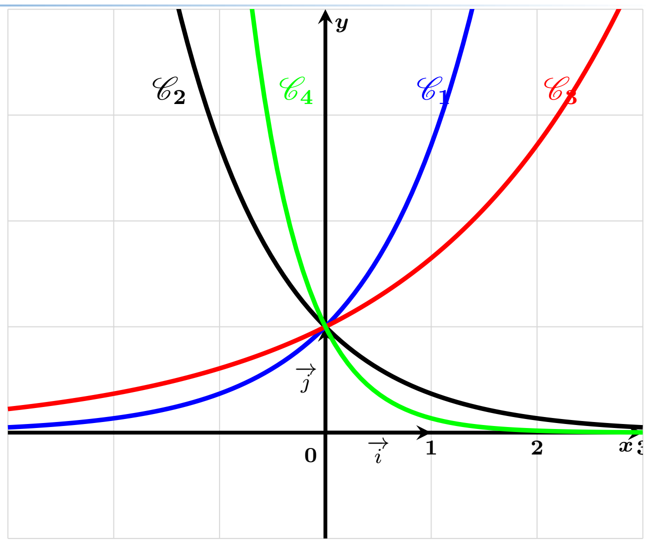
1) Quel est le nombre d'habitants en 2019 ?
2) *a*) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
   b) Déterminer le sens de variation de f.
3) Á l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants.

La fonction f est un exemple de fonction logistique. Ces fonctions ont été mises en évidence par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1849)

Exercice 14

On a tracé les courbes de quatre fonctions f, g, h et i définies sur $\mathbb{R}$. On sait que

- $f(x) = \mathrm{e}^{x}$
- $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$
- $h(x) = \mathrm{e}^{0.5x}$
- et $i(x) = \mathrm{e}^{-2x}$



Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond en justifiant :