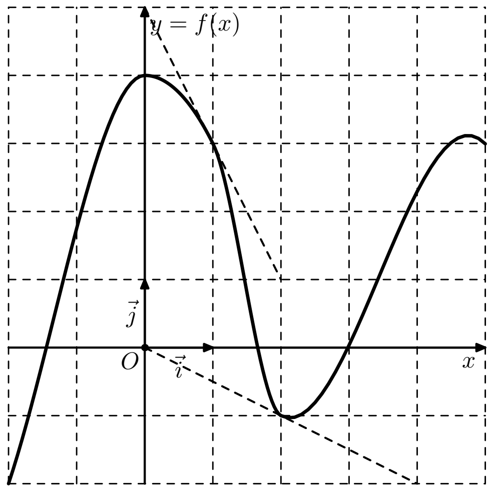
Le nombre dérivé, feuille n° 1

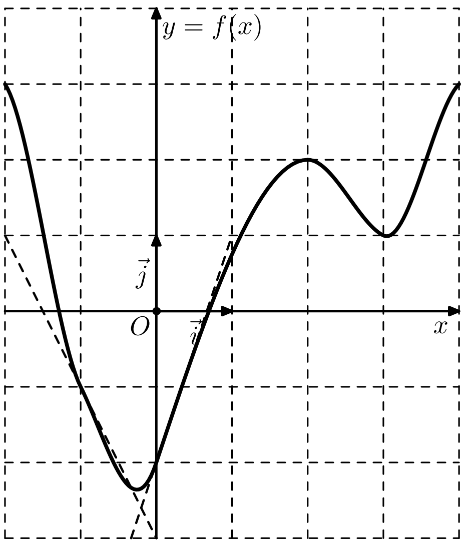
Exercice 1



On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 5]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Déterminer $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2) Quel est le nombre dérivé de f en 0 ?
3) Quel est le signe de $f'(3)$?

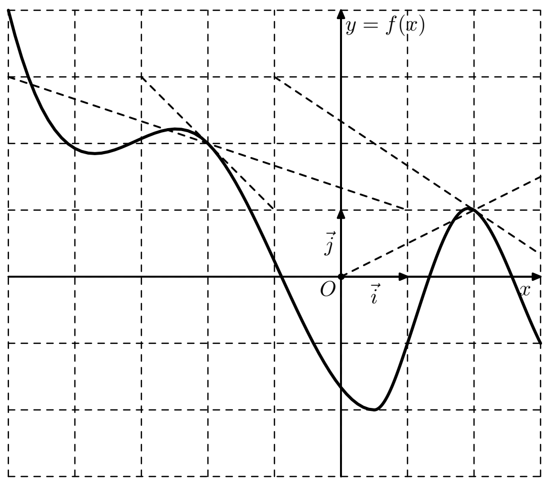
Exercice 2



On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2; 5]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Lire graphiquement $f'(0)$ et $f'(2)$.
2) Lire graphiquement le nombre dérivé de f en -1.
3) Quel est le signe de $f'(1)$? Quel est le signe de $f'(2{,}5)$?

Exercice 3



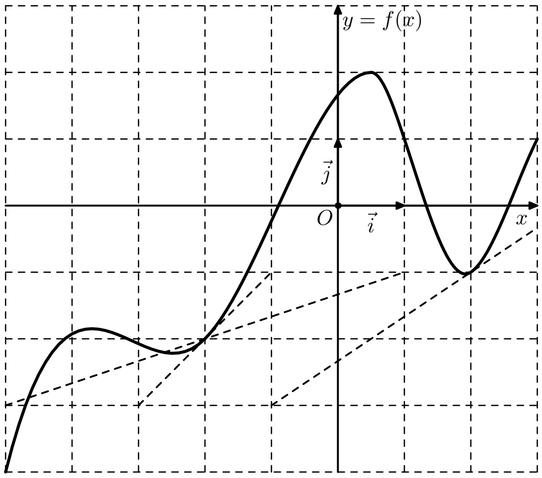
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 3]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1. Donner sans justifier $f'(-2)$ et $f'(2)$.

2. Quel est le signe de $f'(-4)$?

3. Quel est le nombre dérivé de f en 0,5 ? Pourquoi ?

Exercice 4



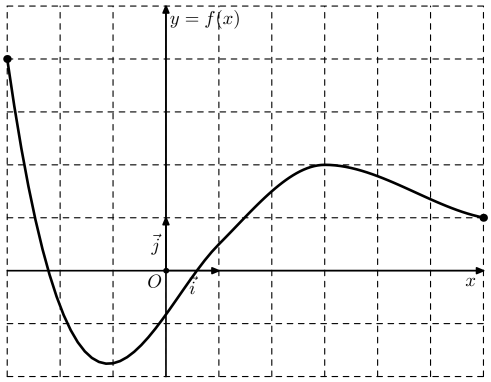
On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-5;3]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Donner, par lecture graphique et sans justifier, $f(-2)$, $f(2)$, $f'(-2)$ et $f'(2)$.

2. Quel est le nombre dérivé de f en 0,5 ? Pourquoi ?

3. Quel est le signe de $f'(-4)$? Expliquer.

Exercice 5



On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-3\ ;\ 6]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Ranger dans l'ordre croissant les nombres $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1) La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Si oui, préciser la valeur de $f'(2)$.

2) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Montrer, en utilisant un taux d'accroissement, que f est dérivable en 4 et que $f'(4)=\dfrac{1}{4}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{3x+4}$.
On se propose de calculer le nombre dérivé de f en 4.

1) Pour tout réel $h\neq 0$ tel que $4+h\geqslant -\dfrac{4}{3}$, vérifier que $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{\sqrt{16+3h}-4}{h}$.

2) Montrer alors que $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{3}{\sqrt{16+3h}+4}$.

3) En déduire le nombre dérivé de f en 4 puis une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 4.

Le nombre dérivé, feuille n° 2.

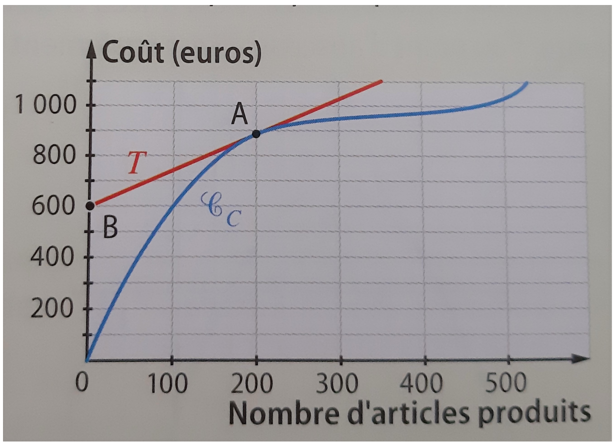
Exercice 9

Au début d'une partie, tous les joueurs sautent d'un bus volant et plongent en chute libre vers une île.
Dans cet exercice, on fait l'hypothèse que les frottements de l'air sont négligeables. Ainsi, la distance parcourue par l'avatar durant la chute, en mètres, t secondes après le saut est donnée par : $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \approx 9{,}81 m.s^{-1}$.

1) Sachant que la vitesse instantanée est égale au nombre dérivé de la distance en cet instant, quelle est la vitesse de l'avatar, 1 seconde après le saut.
   On donnera le résultat en $m.s^{-1}$, puis en $km.h^{-1}$.
2) Pour que l'avatar ne s'écrase pas au sol, son planeur est ouvert automatiquement après 600 mètres de chute libre.
   Déterminer, à la seconde près, le temps passé en chute libre.
3) On admet que la vitesse instantanée est donnée par la fonction $v(t) = gt$.
   Sachant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, montrer en utilisant le taux de variation pour tout nombre t que celle-ci est constante au cours du temps.

Exercice 10

L'entreprise Sportymax fabrique des articles de sport.
Le coût total de ces articles (en euros) est modélisé par une fonction C, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_C$ est donnée ci-dessous.



La tangente T_A à cette courbe au point $A\,(200\,;\,880)$ passe par le point $B\,(0\,;\,600)$.

1) On appelle coût marginal au rang n le coût engendré par la fabrication du $n^{\text{ème}}$ article. Une valeur approchée de ce coût marginal est donnée par le nombre dérivé de la fonction coût en n.
   Déterminer le coût marginal au rang 200.
2) Expliquer la démarche à réaliser graphiquement pour déterminer le coût marginal le plus faible.

Nombre dérivé, tangente et fonction dérivée, feuille n° 3.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Nous allons déterminer **une fois pour toute** le nombre dérivé de f pour un réel a.

1) Soient $h \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le taux d'évolution de f en a et le simplifier.
2) Déterminer alors la limite du taux d'évolution (il doit y avoir du a...).
3) La fonction carrée admet-elle un nombre dérivé pour tout a de $\mathbb{R}$?
   On parlera désormais de la fonction dérivée, de la fonction carré, définie pour toutes valeurs de $\mathbb{R}$.
4) Calculer rapidement (de tête) $f'(-3)$, $f'(7)$ et $f'(1{,}234)$.
5) Sur ce même principe, déterminer le nombre dérivé de la fonction cube en a.

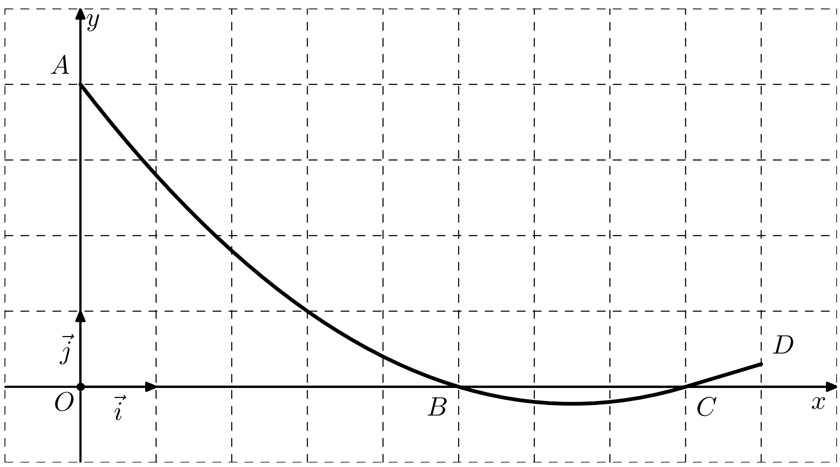
Exercice 12

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3\,x + 2$.
2) $j(x) = \dfrac{-\,x^2 + 3\,x + 5}{4}$.
3) $g(t) = t^2 - 4\,t + 9$.
4) $h(x) = 4\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x - 6$.
5) $k(x) = \dfrac{4\,x^3 + 5\,x^2 - x}{x}$.

Exercice 13

On modélise une rampe de saut à ski par un arc de parabole passant par les points $A(0;4)$, $B(5;0)$ et $C(8;0)$.
On désire finaliser cette rampe à l'aide d'une partie rectiligne entre les abscisses 8 et 9 sans avoir de rupture de pente.



1) Déterminer une expression de la fonction f qui modélise la rampe.
2) Déterminer l'équation réduite de la droite qui modélise la partie rectiligne $[CD]$.
3) La fin de la rampe se termine par une petite montée. Déterminer la hauteur totale de celle-ci.

Exercice 14

Dans un repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction :
$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.
2) Démontrer que T est tangente à $\mathscr{C}_f$ en un autre point.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$.

1) $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en chacun de ses points. Pourquoi ?
2) a) Donner une équation de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.
   b) Le point $E(-4;-3)$ appartient-il à la tangente T_{-3} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.
3) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ dont le coefficient directeur vaut -4 ? Si oui, en quels points ?
4) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite D d'équation $y = -7x + 5$? Si oui, en quels points ?
5) Existe-t-il des tangentes horizontales ? Si oui, en quels points ?

Exercice 16

Pour tester la sécurité des voitures, de nombreux essais sont effectués comme le lancement en ligne droite et à vive allure d'une voiture qui percute un mur.
Durant ce test, on note $x(t)$ la distance en mètres parcourue par le véhicule t seconde après son départ.
La voiture percute le mur au bout de 4 secondes et on admet que pour tout $t \in [0\,;\,4]$, $x(t) = t^3 + 0{,}45t^2$.
x est donc une fonction de la variable temps t.

1) En physique, on note $\dfrac{dx}{dt}$ la dérivée de la fonction x en fonction de t. Déterminer $\dfrac{dx}{dt}$.
2) En déduire la vitesse instantanée de la voiture au démarrage puis lors de l'impact. On donnera les vitesses instantanées en $m.s^{-1}$, puis en $km.h^{-1}$, en arrondissant à l'unité si nécessaire.
3) Quelle est l'expression de l'accélération en fonction du temps ?

Exercice 17

Une entreprise fabrique une boisson conditionnée en bouteille d'un litre. Le coût total de production, exprimé en euro, est donné par $C_T(x) = 4x^3 - 20x^2 + 80x + 100$, où x représente le volume exprimé en centaines de litres, x variant dans l'intervalle $[0\,;\,5]$.

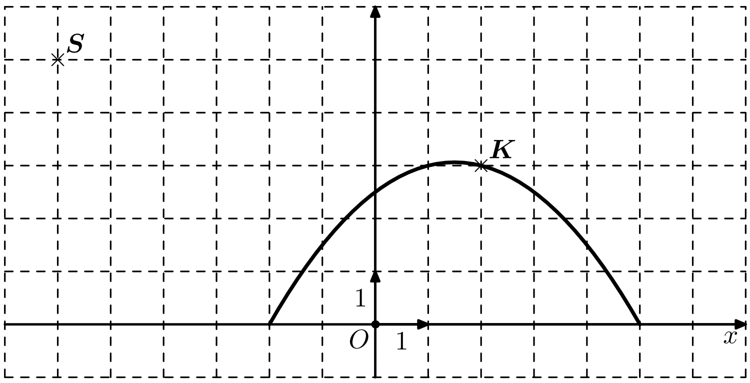
1) Déterminer l'expression du coût marginal C_M en fonction de x.
2) En déduire le coût marginal pour 500 litres produits.
3) Pour quelle production le coût marginal est-il minimal ?

Première **2019 - 2020**

Nombre dérivé, tangente et fonction dérivée, feuille n° 4.

Exercice 18

Sur la figure ci-contre, l'arc de parabole représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.
Le point $S\,(-6\,;\,5)$ représente le soleil en train de se coucher.
L'arc de parabole est la représentation graphique de la fonction f définie pour $x \in [-2\,;\,5]$ par $f(x) = -0{,}25\,x^2 + 0{,}75\,x + 2{,}5$.



BUT : On veut déterminer la longueur de l'ombre de la colline.

1. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point K.

2. Vérifier que le point S appartient à cette tangente T.

3. Pour quelle valeur de x la droite T coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

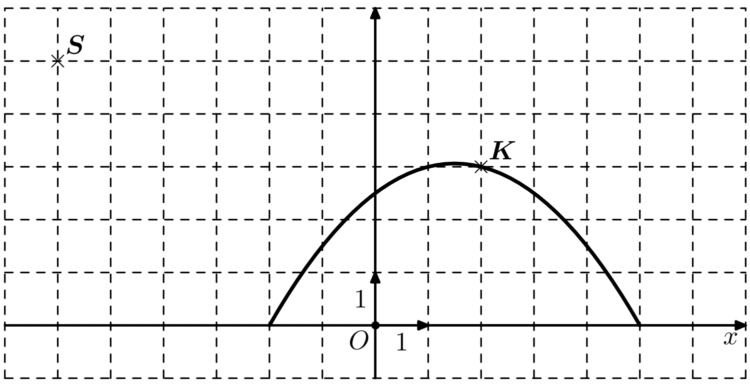
4. Quelle est alors la longueur au sol de l'ombre de la colline ?

Première **2019 - 2020**

Nombre dérivé, tangente et fonction dérivée, feuille n° 4.

Exercice 18

Sur la figure ci-contre, l'arc de parabole représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.
Le point $S\,(-6\,;\,5)$ représente le soleil en train de se coucher.
L'arc de parabole est la représentation graphique de la fonction f définie pour $x \in [-2\,;\,5]$ par $f(x) = -0{,}25\,x^2 + 0{,}75\,x + 2{,}5$.



BUT : On veut déterminer la longueur de l'ombre de la colline.

1. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point K.

2. Vérifier que le point S appartient à cette tangente T.

3. Pour quelle valeur de x la droite T coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

4. Quelle est alors la longueur au sol de l'ombre de la colline ?