Vecteurs

I) Notion de vecteurs

1) Caractéristiques d'un vecteur

Le mouvement rectiligne d'un point A vers un point B se nomme la *translation* de A vers B.

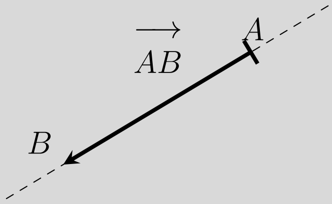
On dit que B est l'image de A dans la translation de *vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

Définition :

Soient A et B deux poinst distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par

- sa **direction** : la droite (AB).
- son **sens** : de A vers B.
- sa **longueur** ou sa **norme** : la longueur du segment $[AB]$, soit

$$AB \text{ ou encore } \|\overrightarrow{AB}\|$$



Notations et vocabulaire

- Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, A est l'**origine** du vecteur et B est l'*extrémité*.
- S'ils ne sont pas liés à deux points, les vecteurs peuvent aussi se noter avec une seule lettre (le plus souvent minuscule) : $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, ...

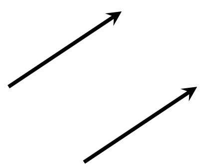
Remarque

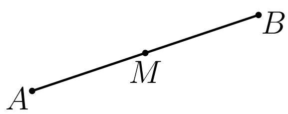
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ (ou $\overrightarrow{BB}$...) est appelé le *vecteur nul*. On le note $\overrightarrow{0}$.

Il n'a pas de direction, ni de sens. Sa norme est égale à 0.

Propriétés :

1) Deux vecteurs sont **égaux** lorsqu'ils ont :
   - la même direction
   - le même sens
   - la même norme
2) M est le milieu de $[AB]$ est équivalent à $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

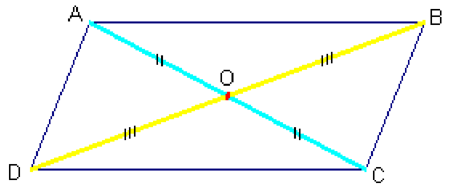




Propriété :

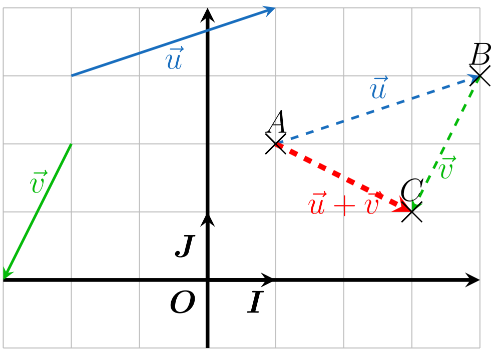
Les phrases mathématiques suivantes signifient la même chose :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $ABCD$ est un parallélogramme.
- $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu



2) Additionner des vecteurs

Approche graphique



Dans le repère $(O; I,J)$, le point A subit la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ puis la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

On dit que la point A a subi la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Dans la figure ci-contre, on a l'égalité : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

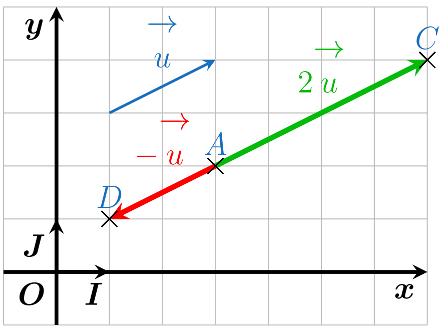
Propriété : Relation de Chasles

Pour tout point A, B et C, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Conséquence : Comme $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$, on en déduit que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

3) Multiplier un vecteur par un nombre/ Colinéarité

Approche graphique



Dans le repère $(O; I,J)$,

- Le point A subit la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ deux fois de suite.

  On dit que la point A a subi la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ ou $2\overrightarrow{u}$.
- Le point C est tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{u}$.
- Le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{u}$.

Définition :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un réel non nul. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est défini par :

- la même direction, le même sens et la norme k fois plus grande que celle de $\overrightarrow{u}$ SI $k > 0$
- la même direction, le sens contraire et la norme $-k$ fois plus grande que celle de $\overrightarrow{u}$ SI $k < 0$

Cas particulier :

- Le **Vecteur opposé** à $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ qui a **la même direction**, la **même norme**, mais de **sens opposé** à $\vec{u}$.
- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB}$ mais aussi $\overrightarrow{BA}$. Ainsi, on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Définition :

On dit que deux vecteurs sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la **même direction**.

Ne pas confondre direction et sens !

Par convention, le vecteur nul (qui ne possède pas de direction) est colinéaire à tout autre vecteur.

Propriété :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$.

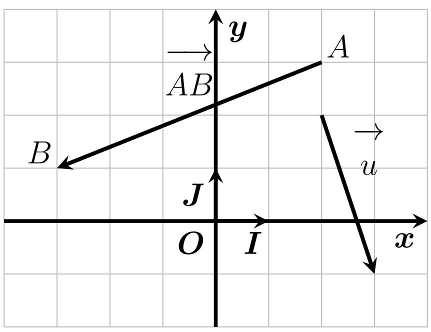
Applications

- Pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On cherche alors un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$.
- Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés, on peut montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On cherche alors un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$.

II) Coordonnées d'un vecteur

1) Définitions

Approche graphique



Dans le repère $(O; I,J)$,

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$
- le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
- le vecteur $\overrightarrow{OI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Propriété : Calcul des coordonnées d'un vecteur

Dans un repère $(O; I,J)$, si on a $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple 1 : Dans le repère $(O; I,J)$, on donne $A\,(2; 3)$ et $B\,(-3; 1)$

On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Propriété : Coordonnées et égalité de vecteurs

Des vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les même coordonnées

Autement dit, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$: Dire que $\vec{u} = \vec{v}$ est équivalent à dire que $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Exemple 2 : Dans le repère $(O; I, J)$, on donne $A\,(5\,;\,3)$, $B\,(17\,;\,15)$, $C\,(8\,;\,9)$ et $D\,(20\,;\,21)$.

Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme :

Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 17-5 \\ 15-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 20-8 \\ 21-9 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $ABDC$ est un parallélogramme.

2) Coordonnées et opérations de vecteurs

Propriété : Coordonnées et addition de vecteurs

Dans un repère $(O; I, J)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Propriété : Coordonnées de vecteur et multiplication par un réel

Dans un repère $(O; I, J)$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et λ un réel, alors on a $\lambda\,\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda\,x \\ \lambda\,y \end{pmatrix}$

De manière générale, on peut dire que l'on traduit l'opération vectorielle sur chacune des coordonnées.

Exemple 3 : Dans le repère $(O; I, J)$, on donne $A\,(5\,;\,3)$, $B\,(17\,;\,15)$ et $C\,(8\,;\,9)$.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BA} + 3\,\overrightarrow{BC}$.

- Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 5-17 \\ 3-15 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$
- Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 8-17 \\ 9-15 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$
- Calcul des coordonnées de $3\overrightarrow{BC}$: $3\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3\times(-9) \\ 3\times(-6) \end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -27 \\ -18 \end{pmatrix}$
- Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}$: : $\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -12-27 \\ -12-18 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}+3\,\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -39 \\ -30 \end{pmatrix}$

3) Coordonnées et colinéarité

Propriété :

> Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\boldsymbol{xy' - x'y = 0}$.

Exemple 4 : Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne $A\,(-1\,;\,3)$, $B(1\,;\,2)$, $C(-5\,;\,1)$ et $D(1\,;\,-2)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

- Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 2-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1-(-5) \\ -2-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$
- Soit on voit que $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, soit on utilise la propriété précédente avec $x = 2$, $y = -1$, $x' = 6$ et $y' = -3$:

$$xy' - x'y = 2 \times (-3) - 6 \times (-1) = -6 - (-6) = -6 + 6 = 0$$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

4) Coordonnées et norme de vecteur

Définition :

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormal, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a $\|\,\vec{u}\,\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ainsi, avec $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple 5 : Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne $A\,(1\,;\,5)$, $B(-1\,;\,1)$ et $C(4\,;\,1)$.
Montrer que ABC est isocèle en C.

- Calcul de la norme de $\overrightarrow{AC}$:

  $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$
- Calcul de la norme de $\overrightarrow{BC}$:

  $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-(-1))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (0)^2} = \sqrt{25} = 5.$

Le triangle ABC est isocèle en C.