Systèmes d'équations

I Définitions

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est de la forme : $\left\{\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & c \\ dx & + & ey & = & f \end{array}\right.$ où a, b, c, d, e, et f sont des nombres donnés.

Exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 8 \\ 2x & - & 9y & = & -5 \end{array}\right.$ est un système de deux équations à deux inconnues x et y.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est trouver tous les couples $(x; y)$ pour lesquels les deux égalités sont vraies simultanément.

Exemple : Le couple $(2; 1)$ est une solution du système précédent, en effet :

$3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ et $2 \times 2 - 9 \times 1 = -5$.

Dans un couple de nombres, l'ordre d'écriture des deux nombres est important !

☞ Le couple $(1; 2)$ n'est pas une solution du système précédent, en effet :
$3 \times 1 + 2 \times 2 = 7 \neq 8$ *(donc $(1; 2)$ n'est pas solution de la première équation)*

Pour résoudre un système, l'idée est d'éliminer d'une des deux inconnues…

II Résolution par substitution

Dans la **méthode par substitution**, on exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des équations, puis on substitue le résultat obtenu dans l'équation restante.

Exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & = & -5 & (L_1) \\ -5x & - & 4y & = & 8 & (L_2) \end{array}\right.$

➩ On exprime y en fonction de x à l'aide de (L_1) : $\boxed{y = -5 - 2x}$

➩ On substitue y par $-5 - 2x$ dans (L_2) :

$$\begin{array}{rcll} -5x - 4(-5 - 2x) & = & 8 & \text{☞ } \textit{On développe} \\ -5x - 4 \times (-5) + 4 \times 2x & = & 8 & \text{☞ } \textit{Attention à la règle des signes} \\ -5x + 20 + 8x & = & 8 & \text{☞ } \textit{On réduit} \\ 3x + 20 & = & 8 & \text{☞ } \textit{On obtient une équation à une inconnue} \\ 3x & = & -12 & \\ x & = & -4 & \text{☞ } \textit{On trouve la valeur de l'inconnue } x. \end{array}$$

➩ On détermine y en remplaçant x par -4 dans $y=-5-2x$:

$y=-5-2\times(-4)$ soit $y=3$

Vérification :

(L_1) : $2\times(-4)+3=-8+3=-5$ ➩ OK!

(L_2) : $-5\times(-4)+4\times3=20+(-12)=8$ ➩ OK!

La solution du système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -5 \\ -5x & - & 4y & = & 8 \end{array}\right.$ est donc le couple $(-4;3)$.

III Résolution par comparaison

Dans la **méthode par comparaison**, on multiplie les deux équations par un nombre afin d'obtenir le même nombre (ou l'opposé) de « x » (ou de « y ») puis on soustrait (ou additionne) membre à membre les deux équations pour éliminer une des deux inconnues :

Exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & = & -5 & (L_1) \\ -5x & - & 4y & = & 8 & (L_2) \end{array}\right.$

➩ On multiplie la première ligne par 4 pour obtenir $-4y$ dans la première ligne et on laisse la deuxième ligne où il y a $-4y$:

$$\begin{array}{l} \times 4 \\ \times 1 \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & = & -5 & (L_1) \\ -5x & - & 4y & = & 8 & (L_2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lrcrcrl} & 8x & + & 4y & = & -20 & (4L_1) \\ + & & & & & & \\ & -5x & - & 4y & = & 8 & (L_2) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 0y & = & -12 \end{array}$$

On additionne membre à membre pour obtenir $0y$

Ainsi, on obtient une équation à une seule inconnue :

$$\begin{array}{rcr} 3x & = & -12 \\ x & = & -4 \end{array}$$

On remplace x par -4 dans L_1 (ou L_2) pour obtenir la valeur de y :

$$\begin{array}{rcr} 2x+y & = & -5 \\ 2\times(-4)+y & = & -5 \\ -8+y & = & -5 \\ y & = & 3 \end{array}$$

Il reste à vérifier et à conclure comme dans la méthode précédente.