

Les suites

I Notion de suite

Définition : Suite numérique

Une **suite**, notée u est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Le **terme d'indice** n ou de **rang** n , noté $u(n)$ ou u_n est l'image d'un nombre entier naturel n par u .

Exemple 1 : Suite des nombres impairs

Voici la suite des nombres impairs : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7 \dots$

Le terme d'indice 0 de la suite u est 1, celui d'indice 1 est 3...

II Modes de génération d'une suite

Définition : Suite définie de façon explicite

Définir une suite par une **formule explicite**, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n .

Remarque : Cela signifie que l'on peut calculer un terme de la suite sans connaître les termes précédents.

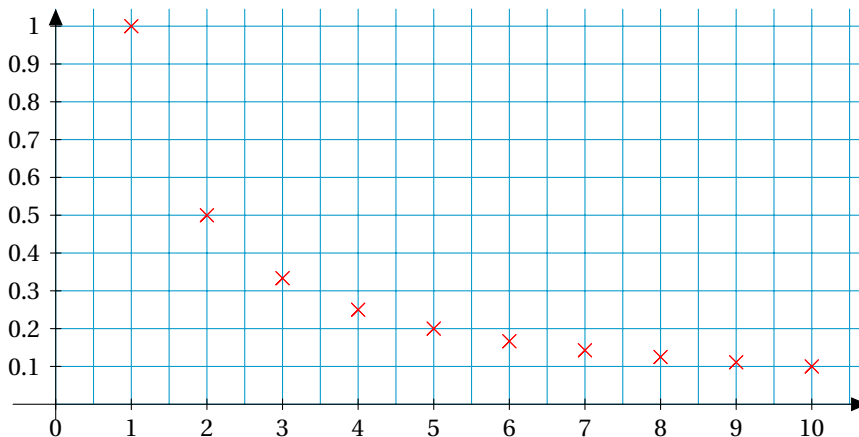
Exemple 2 : Étudier une suite de façon explicite

Calculer, puis représenter les dix premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction :

On remarque que cette suite n'est pas définie pour $n = 0$.

Pour calculer le deuxième terme, u_2 , on effectue le calcul : $u_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \dots$



n	u_n
1	1,00
2	0,50
3	0,33
4	0,25
5	0,20
6	0,17
7	0,14
8	0,13
9	0,11
10	0,10

Définition : Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une **relation de récurrence**, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n .

Remarque :

On ne peut alors calculer un terme que si l'on connaît le précédent, il faut calculer de proche en proche tous les termes à partir du premier.

Exemple 3 : Étudier une suite définie par récurrence

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n + 6$.

Calculer les premiers termes de cette suite.

Correction :

On a déjà $u_0 = 2$. On peut ensuite calculer u_1 : $u_1 = 3 \times u_0 + 6 = 3 \times 2 + 6 = 12$

Pour u_2 : $u_2 = 3 \times u_1 + 6 = 3 \times 12 + 6 = 42$

Pour u_3 : $u_3 = 3 \times u_2 + 6 = 3 \times 42 + 6 = 132 \dots$

Remarque :

Une relation de récurrence peut aussi faire intervenir plusieurs des termes précédents, par exemple la célèbre **suite de Fibonacci** : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Pour définir la suite, la donnée du premier terme ne suffit pas, il faut en donner plusieurs.

Ici par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

III Les suites arithmétiques

Définition : Suite arithmétique

On dit qu'une **suite** (u_n) est **arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique (u_n) .

Remarque :

Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence ; on ajoute toujours le même nombre.

Pour la définir, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemple 4 : Une suite arithmétique

La suite définie par
$$\begin{cases} u_3 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases} \text{ pour } n \geq 3$$
 est une suite arithmétique de raison -5 .
(On enlève 5 à chaque étape)

Remarque :

Pour **montrer qu'une suite est arithmétique** :



- ☞ On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.
- ☞ On montre que cette différence est constante.

Exemple 5 : Démontrer qu'une suite est arithmétique

Montrer que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2 + 3n$ est arithmétique.

Correction :

Pour tout n dans \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = 2 + 3(n+1) - (2 + 3n) = 2 + 3n + 3 - 2 - 3n = 3$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

IV Les suites géométriques

Définition : Suite géométrique

On dit qu'une **suite** (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times q = q \times u_n$.

Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique (u_n) .

Remarque :

Une suite géométrique est définie par récurrence ; on multiplie toujours par le même nombre. Pour définir une suite géométrique, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemple 6 : de suite géométrique

La suite des puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32...) est géométrique de raison 2.

On peut définir cette suite par $u_{n+1} = 2 \times u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.

Remarque :



Pour **montrer qu'une suite est géométrique** :

- ☞ On calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
- ☞ On montre que ce quotient est constant.

V Sens de variations d'une suite

Définition : Suite croissante, décroissante, monotone

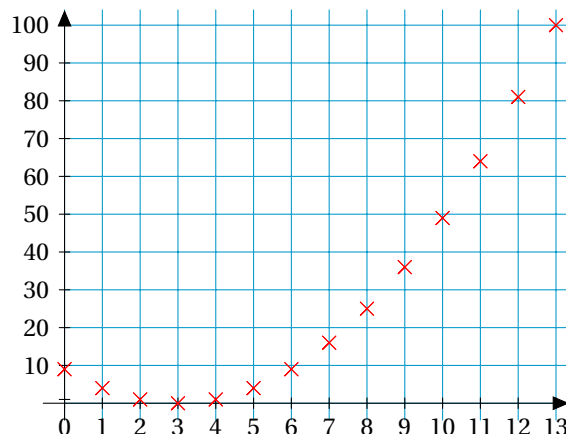
- ☞ On dit qu'une suite u est **croissante** si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- ☞ On dit qu'une suite u est **décroissante** si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- ☞ On dit qu'une suite u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

- ☞ On définit de même une suite strictement monotone en utilisant des inégalités strictes.
- ☞ Une suite peut être monotone à partir d'un terme (d'un certain rang).

Exemple 7 : Variation d'une suite

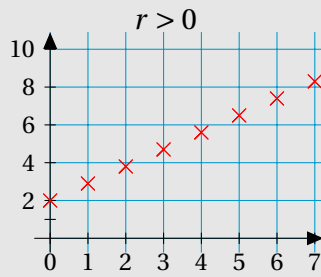
La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 9$ est croissante à partir de l'indice 3.



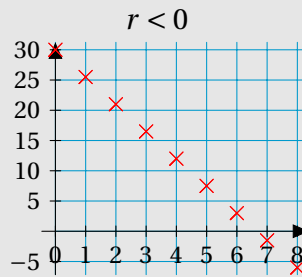
Propriété : Cas d'une suite arithmétique

Soit la suite u arithmétique de raison r non nulle et de premier terme u_0 .

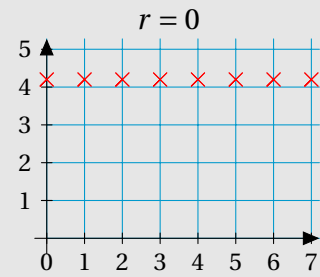
- ☞ Si r est négatif, alors la suite u est décroissante.
- ☞ Si r est positif, alors la suite u est croissante.



u est croissante



u est décroissante

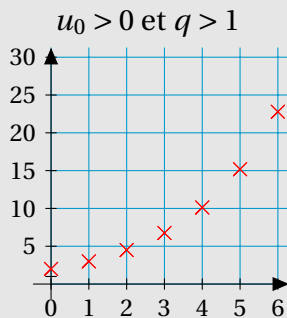


u est constante

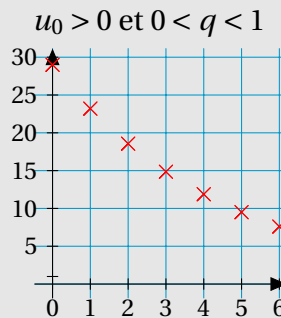
Propriété : Cas d'une suite géométrique

Soit la suite u géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

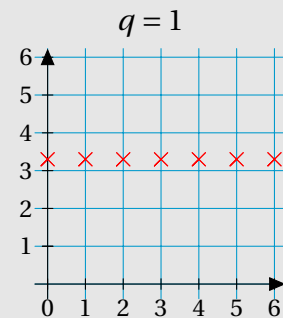
- ☞ Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est décroissante.
- ☞ Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors la suite u est croissante.



u est croissante



u est décroissante



u est constante

Exemples 8 :

- ☞ La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2n + 5$ est arithmétique de raison -2 . Elle est donc décroissante.
- ☞ La suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $0 < \frac{1}{3} < 1$ et de premier terme $v_0 = 2 > 0$. Elle est donc décroissante.

Remarque :

Pour étudier le sens de variation d'une suite on peut :

- ☞ Observer son comportement sur une calculatrice ou sur un tableur
- ☞ Utiliser ce que l'on connaît des suites arithmétiques et des suites géométriques.
- ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- ☞ Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs

