Probabilités

I Vocabulaire des événements

Définition : *Expérience aléatoire*

Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont les résultats possibles sont connus sans qu'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Remarque : Le but de ce chapitre est de les mathématiser.

Définition : *Univers*

L'**univers d'une expérience aléatoire** est l'ensemble des issues possibles appelé également **éventualités**.
On le note Ω.

Exemples 1 :

Quels sont les univers des expériences aléatoires suivantes ?

1) E_1 : Lancer un dé à six faces.
2) E_2 : Lancer une pièce de monnaie.
3) E_3 : Jouer au loto (FDJ).
4) E_3 : Naissance (genre).

Correction :

1) $E_1 : \Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
2) $E_2 : \Omega = \{\text{Pile; Face}\}$
3) E_3 : Ω contient plusieurs millions d'éléments du type $(2;5;19;35;42;23), (4;8;9;21;34;12), \ldots$
4) $E_4 : \Omega = \{\text{Fille ; garçon}\}$

Définition : *Événement*

Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.
Il peut toujours se décrire à l'aide d'issues.

Définition : *Union*

Soient A et B deux événements.
L'**union** de A et de B est l'ensemble des issues qui réalisent A **ou** B.
On le note $A \cup B$ (se lit « A $\cup$nion B»).

Définition : *Intersection*

Soient A et B deux événements.
L'**intersection** de A et B est l'ensemble des issues qui réalisent A **et** B.
On le note $A \cap B$ (se lit « A i$\cap$ter B»).

Exemples 2 :

Pour E_1, décrire les événements suivants.

1) A : « Faire un nombre pair ».
2) B : « Faire un multiple de 3 ».
3) $A \cup B$
4) $A \cap B$

Correction :

1) $A = \{2;4;6\}$
2) $B = \{3;6\}$
3) $A \cup B = \{2;3;4;6\}$
4) $A \cap B = \{6\}$

On lance un dé à 20 faces.

1. Quel est l'univers de cette expérience ? ....

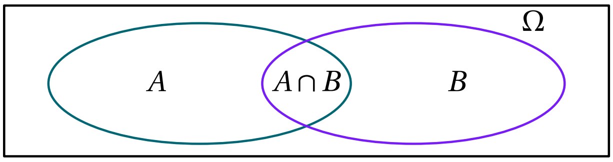
2. Décrire l'événement A : « Faire un multiple de 3 » ....

3. Décrire l'événement B : « Faire un multiple de 5 » ....

4. Décrire l'événement $A \cup B$ ....

5. Décrire l'événement $A \cap B$ ....

Remarque : Le **diagramme de Venn** permet de représenter les différents événements.



II Choix d'un modèle

II.1 Par l'observation des fréquences

Définition : ***De la fréquence à la probabilité***

Lorsqu'on répète n fois, de façon indépendante, une expérience aléatoire, la fréquence d'une issue va avoir tendance à se stabiliser lorsque n augmente.
La probabilité de l'issue est très proche de la valeur stabilisée observée.

Exemple 3 : ***Observation des fréquences***

Dans une urne opaque contenant un certain nombre de billes rouges, bleues ou jaunes. On tire une bille de l'urne, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne.
On a réalisé l'expérience un très grand nombre de fois :

Nb de boules tirés	Nb d'expériences réalisées		
	2000	5000	10000
Rouges	653	1658	3332
Bleues	1007	2546	5005
Jaunes	340	796	1663

Estimer les probabilités de tirer une boule rouge, une bleue et une jaune.

Correction :
Pour $n = 10\,000$. Par expérience, on a obtenu :

☞ $f_R = \dfrac{3\,332}{10\,000} = 0,3332$

☞ $f_B = \dfrac{5\,005}{10\,000} = 0,5005$

☞ $f_B = \dfrac{1\,663}{10\,000} = 0,1663$

On peut choisir le modèle

	R	B	J
Probabilités :	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$

Calculer les fréquences obtenues pour 2000 tirages puis pour 5000 tirages.

Remarque :

1) Lors de la construction du modèle il faut s'assurer que la somme des probabilités fasse 1.
2) Une « modélisation » est une approximation.
   Il y a peu de chances que le modèle colle exactement à la réalité.

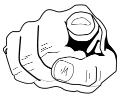
II.2 Modèle équiréparti

Définition : *Modèle équiréparti*

Dans un **modèle équiréparti**, chaque issue a la même probabilité qui vaut :

$$\frac{1}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

On dit aussi que c'est une **situation d'équiprobabilité**.



On lance un dé à 20 faces équilibré. Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(A)$ où A : « Faire un multiple de 3 » ....
2. $P(B)$ où B : « Faire un multiple de 5 » ....
3. $P(A \cup B)$ ....
4. $P(A \cap B)$ ....

III Calculs de probabilités

Définition : *Loi de probabilité*

Une **loi de probabilité** sur un univers associe à chaque issue qui le réalise un nombre compris entre 0 et 1 appelé probabilité. La somme des probabilités des issues est 1.

Définition : *Probabilité d'un événement*

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemples 4 : *Calculer des probabilités*

1) Si le modèle n'est pas équiréparti, on observe des fréquences.
2) On détermine les issues réalisant l'événement dont on souhaite connaitre la probabilité.
3) On additionne les probabilités des issues qui le réalisent.

On lance un dé équilibré à 4 faces et on note le numéro de la face du dessus. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Correction :

Le dé est équilibré, c'est une situation d'équiprobabilité. L'univers est constitué de 4 issues : 1, 2, 3, 4.
La probabilité de chaque issue est donc $\frac{1}{4}$.
L'événement « obtenir un nombre pair » est constitué de deux issues
« 2 » et « 4 » donc sa probabilité est $\frac{1}{4} \times 2$ soit $\frac{1}{2}$.

On lance un dé truqué qui vérifie $p(1) = 2p(2) = p(3) = 2p(4) = p(5) = 2p(6)$. Quel est la probabilité de l'événement E : « obtenir un multiple de 3 » ?

Correction :

On a :
$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$
$p(1) + \frac{1}{2}p(1) + p(1) + \frac{1}{2}p(1) + p(1) + \frac{1}{2}p(1) = 1$ soit $p(1) = \frac{2}{9}$. « Obtenir un multiple de 3 »est un événement composé des deux issues « 3 » et « 6 ».
$p(E) = p(3) + p(6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{18} = \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$.

On considère un dé pipé.

En utilisant le tableau suivant :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,15	0,25	

1. Calculer $p(6)$. . . . .

   . . . .

2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair. . . . .

   . . . .

3. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre premier. . . . .

   . . . .

Remarque :

Dans un modèle équiréparti, il suffit de compter le nombre d'issues réalisant A pour calculer sa probabilité.

Définition : *Événement contraire*

Soit A un événement. L'**événement contraire** à A est constitué des issues de Ω ne réalisant pas dans A et se note $\overline{A}$. Sa probabilité vaut : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Propriété : *Relation entre $\cup$ et $\cap$*

Si A et B sont deux événements alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

On lance un dé à 20 faces équilibré et on considère les événements :
A : « Faire un multiple de 3 » B : « Faire un multiple de 5 »

1. Calculer $P(A) + P(B)$. . . . .

   . . . .

2. Calculer $P(\overline{A \cup B})$. . . . .

   . . . .

3. Calculer la probabilité de ne pas obtenir 7. . . . .

   . . . .

Remarque :

1) Un **événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais. Sa probabilité vaut 0.
2) Un **événement certain** est un événement qui est sûr de se réaliser. Sa probabilité vaut 1.

☞ À priori, $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$. Elle n'est vraie que si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$).
☞ Cette formule peut également s'écrire sous la forme $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$