Équations et inéquations

I Problématique

Une entreprise fabrique des clefs USB. Le coût total de fabrication en fonction du nombre de clefs produites est donné par la fonction :

$$C(x) = 0,04x^2 + 5x + 100$$

L'entreprise peut vendre ses clefs 10 euros l'unité.

1. Est-ce rentable de produire puis de vendre 50 clefs ?
2. Est-ce rentable de produire puis de vendre 100 clefs ?

En supposant que toutes les clefs sont vendues, le bénéfice est modélisé par la fonction :

$$B(x) = -0,04x^2 + 5x - 100$$

Pour quelles quantités produites l'entreprise fait-elle des bénéfices ?
Deux possiblités d'études s'offrent à nous :

- Une étude graphique ;
- Une étude algébrique.

II Résolution exacte d'équations ou inéquations

II.1 Équations et inéquations du premier degré

Propriété : ***Opérations sur les équations***

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une **équation** :

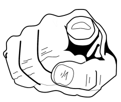
☞ additionner un même nombre aux deux membres d'une équation ;
☞ multiplier par un même nombre non nul les deux membres d'une équation.

Propriété : ***Opérations sur les inéquations***

Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'une **inéquation** :

☞ additionner un même nombre aux deux membres d'une inéquation ;
☞ multiplier par un **même nombre positif non nul** les deux membres d'une inéquation ;
☞ multiplier par un **même nombre négatif non nul** les deux membres d'une inéquation *à condition d'inverser le sens de l'inégalité.*

Exemple 1 : ***Résoudre un problème algébriquement***



Le cinéma d'art et d'essai de Mathyville propose une carte d'abonnement annuelle à 15€et la séance coûte alors 6,40€au lieu de 9€. Rania hésite à s'abonner.
À combien de séances dans l'année doit-elle assister au minimum pour que l'abonnement devienne intéressant ?

1) On **détermine** et **dénomme** l'inconnue.

2) On **interprète** les informations sous forme d'une (in)équation.

3) On **résout** l'(in)équation en utilisant les règles précédentes :
   - ☞ on regroupe les termes contenant l'inconnue dans le même membre de l'(in)équation ;
   - ☞ si nécessaire, on réduit les expressions des deux membres ;
   - ☞ on isole l'inconnue dans l'ordre inverse des priorités de calcul.

4) On **répond** au problème posé par une phrase. La résolution de l'(in)équation peut faire apparaître des solutions correctes mathématiquement, mais incohérentes avec le problème.

Correction :

1) On désigne par x le nombre de séances de cinéma auxquelles Rania ira cette année.

2) Avec l'abonnement cela coûterait : $15+6,4x$. Sans l'abonnement cela coûterait : $9x$.
   Pour que l'abonnement soit intéressant, il suffit que
   $15+6,4x<9x$.

3) Lors de la résolution qui suit, chaque étape est équivalente à la précédente.

$$15+6,4x-6,4x<9x-6,4x$$

$$15<2,6x$$

$$\frac{15}{2,6}<\frac{2,6x}{2,6}$$

$$\frac{15}{2,6}<x$$

   Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle $\left]\frac{15}{2,6};+\infty\right[$.

4) Or, $\frac{15}{2,6}\approx 5,8$. Les solutions du problème sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 6. Donc il suffit que Rania aille au cinéma au moins 6 fois dans l'année pour que l'abonnement soit intéressant.

II.2 Équations de degré deux

En classe de seconde, on se ramène, si possible, à une forme factorisée pour utiliser la propriété suivante :

Propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Exemple 2 : ***Obtenir et résoudre une équation-produit***

Dans un repère, on représente f définie par $f(x)=3(x-7)^2-12$ pour $x\in[-6;6]$.
Combien de fois la courbe coupera-t-elle l'axe des abscisses ?
S'il(s) existe(nt), préciser les coordonnées de ce(s) point(s).

Pour résoudre une équation plus complexe, on obtient puis résout une équation-produit.

1) On se ramène à une équation ayant un membre nul.

2) On factorise l'expression littérale.

3) On résout l'équation produit obtenue.

Correction :

Les points d'intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses sont les points de la courbe d'ordonnée nulle. On note x l'abscisse des points d'intersection. Ce sont donc les antécédents de 0 et il suffit de résoudre l'équation $3(x-7)^2-12=0$ dans $[-6;6]$ pour les trouver.
Lors de la résolution, chaque étape est équivalente à la précédente.

1) *On obtient et on simplifie une équation ayant un membre nul.*

   $3(x-7)^2-12=0$

   $(x-7)^2-4=0$

2) *On factorise en reconnaissant l'identité remarquable :* $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

   $(x-7)^2-2^2=0$

   $(x-7+2)(x-7-2)=0$

   $(x-5)(x-9)=0$

3) *On résout l'équation produit obtenu.*

   $$\begin{array}{rcl} x-5=0 & \text{ou} & x-9=0 \\ x=5 & \text{ou} & x=9 \end{array}$$

4) *On répond au problème posé.*

   Cette équation a deux solutions : 5 et 9.

   Or, $9 \notin [-6;6]$. La courbe représentative de la fonction f dans un repère pour $x \in [-6;6]$, coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(5;0)$.

Remarques :

- ☞ Certaines équations ne se factorisent pas dans $\mathbb{R}$.
  Par exemple $x^2+3=0$ n'admet pas de solution réelle.
- ☞ Des logiciels de calculs formels peuvent aider à la résolution d'équation.

II.3 Inéquations et tableaux de signes

Exemple 3 : *Étudier le signe du produit de deux fonctions affines*

Pour déterminer le signe du produit de deux fonctions affines, on construit un tableau de signes à 4 lignes.

1) La **1e ligne** indique les bornes de l'ensemble de définition
   et les valeurs qui annulent le produit des deux fonctions affines.

2) Les **2e et 3e lignes** indiquent le signe de chacune des deux fonctions affines.

3) La **4e ligne** se remplit avec la règle des signes du produit de deux nombres relatifs :

   a) des facteurs de même signe donnent un produit positif;

   b) des facteurs de signes contraires donnent un produit négatif.

Résoudre l'inéquation $(3x+4)(-2x+6) \leqslant 0$.

Correction :

On étudie le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x+4)(-2x+6)$.

Études de chaque facteur :

- $3x+4=0$ implique $x = -\dfrac{4}{3}$.
  $3x+4$ est l'expression algébrique d'une fonction **affine croissante**.
- $-2x+6=0$ implique $x=3$.
  $-2x+6$ est l'expression algébrique d'une fonction **affine décroissante**.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$-2x+6$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de cette inéquation sont les nombres de l'ensemble $\left]-\infty;-\dfrac{4}{3}\right] \cup [3;+\infty[$.

III Résolution approchée d'équations ou d'inéquations

Il est possible d'estimer les solutions d'une équation ou d'une inéquation à l'aide d'un graphique.

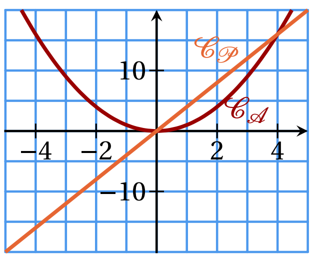
Exemple 4 : *Estimer graphiquement une solution*

1) On trouve deux fonctions f et g telles que l'(in)équation puisse s'écrire sous la forme $f(x) = g(x)$ ou $f(x) < g(x)$.
2) On trace les courbes représentatives de f et g dans un même repère.
3) On cherche les abscisses
   - des points d'intersection des deux courbes pour résoudre $f(x) = g(x)$;
   - des points de $\mathscr{C}_f$ au-dessous (au-dessus) de $\mathscr{C}_g$ pour $f(x) < g(x)$ $\big(f(x) > g(x)\big)$.

Jacques a dit que le périmètre d'un carré est toujours inférieur à son aire. A-t-il raison ?

Correction :

1) On note x le côté d'un carré. Le périmètre est définie par $\mathscr{P}(x) = 4x$ et l'aire par $\mathscr{A}(x) = x^2$.
   Répondre à la question revient à étudier l'inéquation $\mathscr{P}(x) \leqslant \mathscr{A}(x)$.



2) On trace leur courbe représentative $\mathscr{C}_{\mathscr{P}}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{A}}$ dans un même repère.
3) Le graphique indique deux zones disjointes pour lesquelles $\mathscr{P}(x) \leqslant \mathscr{A}(x)$: $]-\infty;0]$ et $[4;+\infty[$. Donc, pour des valeurs entre 0 et 4 unités, le périmètre d'un carré est supérieur à son aire. Jacques a tort !

On se ramène à la problématique initiale.

- Démontrer que $-0,04x^2 + 5x - 100 = -0,04(x-25)(x-100)$.
- Dresser le tableau de signes de la fonction bénéfices : $B(x) = -0,04x^2 + 5x - 100$
- **Pour quelles quantités produites l'entreprise fait-elle des bénéfices ?**
- Vérifier graphiquement les solutions trouvées.