Fonction dérivée : Partie 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

I Nombre dérivé et tangente

Définitions : *Taux d'accroissement*

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts appartenant à I. On appelle **accroissement moyen** de f entre x_1 et x_2 la quantité :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

En notant $x_1 = a$ et $x_2 = a+h$ avec $h \neq 0$, on obtient le **taux d'accroissement** :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarque : L'**accroissement moyen** est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par les points $(x_1\ ;\ f(x_1))$ et $(x_2\ ;\ f(x_2))$.

Définition : *Nombre dérivé*

Si, lorsque h se rapproche de 0, **taux d'accroissement** se rapproche d'un réel ℓ, alors :

- ☞ on dit que la fonction f est **dérivable** en a ;
- ☞ le réel ℓ est appelé **nombre dérivé de f en** a, que l'on note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a).$$

« $\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dots$ » se lit « **tend vers** ... lorsque h tend vers 0 ».

Exemple 1 : *Déterminer un nombre dérivé*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Déterminer s'il existe $f'(3)$.

Correction :

Pour tout $h \neq 0$: $\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$ or, $6+h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 6$.

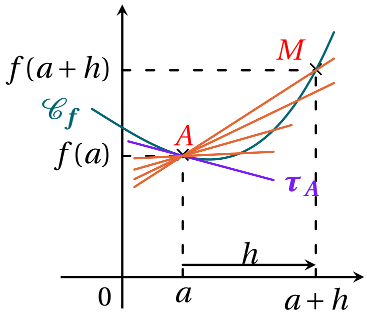
On obtient un nombre réel donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

Définition : *Tangente*

Soient A et M deux points distincts d'une courbe. Géométriquement, la **tangente** à la courbe au point A est la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A.

Remarque :

Soit a un réel pour lequel f est dérivable et soit $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$.
Les deux points $A(a\,;\, f(a))$ et $M(a+h\,;\, f(a+h))$ sont deux points distincts de $\mathscr{C}_f$. Le **taux d'accroissement** entre a et $a+h$ représente le coefficient directeur de la droite (AM), sécante à la courbe.
On note τ_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.



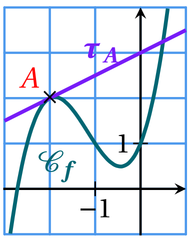
Lorsque $h \to 0$:
- ☞ M se rapproche de A ;
- ☞ (AM) se rapproche de τ_A ;
- ☞ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche de $f'(a)$.

Propriété : *Coefficient directeur de la tangente*

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Exemple 2 : *Lire graphiquement un nombre dérivé*

Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique. La droite τ_A est tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.
Déterminer graphiquement $f'(-2)$.



Correction :

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de τ_A. Graphiquement, on a $f'(-2) = 0,5$.
(À partir du point A, on avance de deux unités vers la droite puis on monte d'une unité pour revenir sur la courbe...)

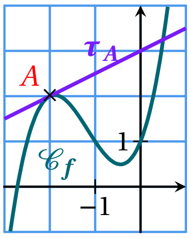
Propriété : *Équation réduite de la tangente*

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative $\mathscr{C}_f$. **L'équation réduite de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple 3 : *Équation d'une tangente*

Dans l'exemple précédent, on sait maintenant que le coefficient directeur de la tangente τ_A est $f'(-2) = 0,5$.
Il reste à déterminer entièrement l'équation de cette tangente :
τ_A est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
De plus, $f(-2) = 2$.
Ainsi, en utilisant la formule : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = -2$, on obtient :
$\tau_A : \quad y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2) = 0,5(x+2) + 2$.



En développant, on obtient :
$\tau_A : \quad y = 0,5(x+2) + 2 = 0,5x + 0,5 \times 2 + 2 = 0,5x + 1 + 2 = 0,5x + 3$.

On reconnaît l'ordonnée à l'origine de cette droite : 3.
Cela correspond bien au graphique ci-contre.

II Fonction dérivée

Définition : *Fonction dérivée*

Si, pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable sur I.
On définit alors une nouvelle fonction f' sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Cette fonction est appelée **fonction dérivée** de f.

Propriété : *Dérivées des fonctions du second degré*

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2ax + b$.

Exemples 4 : *Calculs de dérivées*

1) $f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 2$.

$$f'(x) = 2 \times 3x - 4 = 6x - 4$$

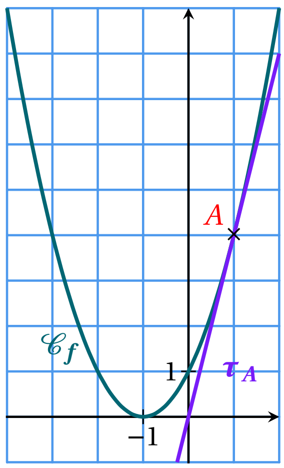
2) $f : x \mapsto -5x^2 + 7$.

$$f'(x) = 2 \times (-5)x = -10x.$$

Exemple 5 : *Équation d'une tangente*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
Déterminer par le calcul l'équation de la tangente τ_A à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Correction :

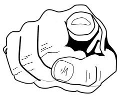


Voici une façon de procéder :

- On détermine l'expression de la fonction dérivée f'.
- On calcul le nombre dérivé au point d'abscisse voulu.
  Cela donnera le coefficient directeur de la tangente cherchée.
- On utilise l'équation réduite de la tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$f(x) = x^2 + 2x + 1$, donc, $f'(x) = 2 \times x + 2 = 2x + 2$.
Au point d'abscisse 1, le nombre dérivé est donc : $f'(1) = 2 \times 1 + 2 = 4$.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est 4.
En utilisant la formule : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 1$ et $f(1) = 4$, on obtient :
$\tau_A : \quad y = f'(1)(x-1) + f(1) = 4(x-1) + 4$.

En développant, on obtient :
$\tau_A : \quad y = 4(x-1) + 4 = 4x - 4 \times 1 + 4 = 4x - 4 + 4 = 4x$.



Retrouver graphiquement l'équation de cette tangente.

III Signe de la dérivée et variations

Propriété : ***Du signe de $f'(x)$ au sens de variation de f***

1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple 6 : ***Déterminer les variations d'une fonction***

Déterminer les variations de la fonction f définie par : $f(x) = 1,5x^2 - 6x + 5$.

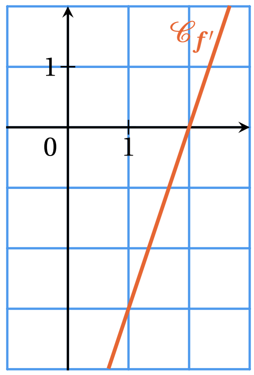
En pratique :

1) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2) On étudie le signe de $f'(x)$.
3) On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.

Calculer la dérivée de cette fonction et construire le tableau de signe de f'.

Correction :

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = 2 \times 1,5x - 6 = 3x - 6$.
f' est une fonction affine, son coefficient directeur est positif donc elle est croissante.



Pour connaître le signe de f' il faut donc rechercher l'antécédent de 0 :
Pour cela, on doit résoudre l'équation : $3x - 6 = 0$:

$$\begin{aligned} 3x - 6 &= 0 \\ 3x &= 6 \\ x &= 6 \div 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La fonction f' s'annule pour $x = 2$. Comme f' est croissante, on connaît son signe.
On en déduit les variations de f :
D'où le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Pour compléter le tableau, on calcule : ☞ $f(2) = 1,5 \times 2^2 - 6 \times 2 + 5 = 1,5 \times 4 - 12 + 5 = 6 - 12 + 5 = -1$

Étudier les variations de la fonction : $g(x) = 4x^2 + 5x - 3$.