Applications de la dérivation

Dans tout le chapitre, on notera f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

I Signe de la dérivée et variations

Propriété : *Du sens de variation de f au signe de $f'(x)$*

1) Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I.
2) Si f est strictement croissante sur I, alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x de I.
3) Si f est strictement décroissante sur I, alors $f'(x) \leqslant 0$ pour tout réel x de I.

Exemples 1 : *Variation et signe*

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a donc $f'(x) = 2x$.
   f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et on a bien $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\,0]$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a donc $f'(x) = 3x^2$.
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a bien $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque :

En pratique, on utilisera plutôt la propriété suivante (qui est presque réciproque de la précédente) car il est plus facile d'obtenir le signe d'une expression que le sens de variation d'une fonction.

Propriété : *Du signe de $f'(x)$ au sens de variation de f*

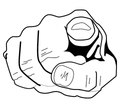
1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple 2 : *Déterminer les variations d'une fonction*

Déterminer les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} - x$.

En pratique :

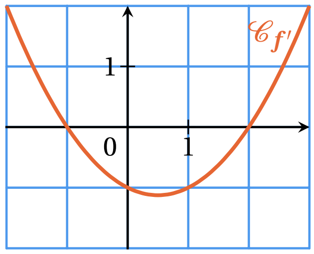
1) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2) On étudie le signe de $f'(x)$.
3) On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.



Calculer la dérivée de cette fonction et construire le tableau de signe de f'.

Correction :

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} - 1$.
f' est une fonction polynôme du second degré et ses racines sont -1 et 2. Comme $a > 0$, on a alors :



D'où le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\dfrac{7}{12}$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{3}$	$\nearrow$	

Pour compléter le tableau, on calcule :

☞ $f(-1) = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{-2-3+12}{12} = \dfrac{7}{12}$ ☞ $f(2) = \dfrac{8}{6} - 1 - 2 = \dfrac{4}{3} - 3 = -\dfrac{5}{3}$

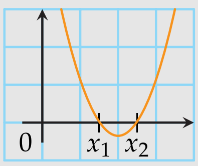
Comme le montre cet exemple, la fonction dérivée peut-être une fonction du second degré.
Il est donc intéressant de se rapeller le signe d'une fonction du second degré :

Propriété : *Signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$*

Le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et du signe de son discriminant Δ :

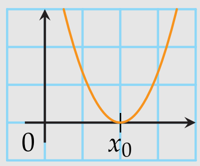
<table>
<tr><th></th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr>
<td>Signe de
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a > 0$</td>
<td>

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	-	0	$+$	



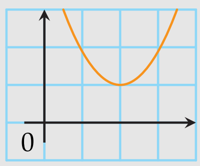
</td>
<td>

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	



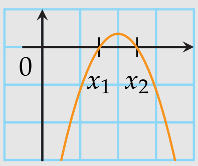
</td>
<td>

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	



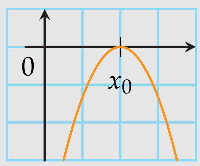
</td>
</tr>
<tr>
<td>Signe de
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a < 0$</td>
<td>

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



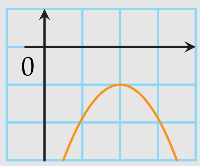
</td>
<td>

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	



</td>
<td>

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	



</td>
</tr>
</table>

Remarques :

- Le trinôme ax^2+bx+c est du **même signe que** a, **sauf entre les racines** lorsqu'elles existent.
- Pour déterminer le signe du trinôme ax^2+bx+c, il faut d'abord chercher ses racines.
- **Signe du discriminant** : la courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- **Signe de** a : le sommet est-il en haut ou en bas de la courbe ?
- Avoir en tête l'allure de la fonction $f(x)=x^2$ permet de retrouver cette propriété.

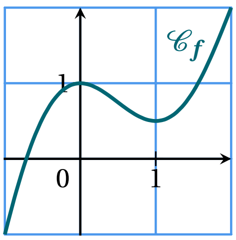
II Extrema d'une fonction

Définition : *Extremum*

1) On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in J$: $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
2) Dire qu'une fonction admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

Exemple 3 : *Exemple graphique*

La fonction f représentée ci-dessous est définie sur $I=[-1\,;\,2]$.



1) f admet un maximum local en $a=0$.
En effet, prenons $J=]-0,5\,;\,0,5[$ pour lequel on a bien $0\in J\subset I$ et pour tout $x\in J$, $f(x)\leqslant 1$.
2) f admet un minimum local en $a=1$.
En effet, prenons $J=]0,5\,;\,1,5[$ pour lequel on a bien $1\in J\subset I$ et pour tout $x\in J$, $f(x)\geqslant \frac{1}{2}$.
3) On ne peut pas dire que f admet un maximum local en $a=2$ car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant a et contenu dans I.

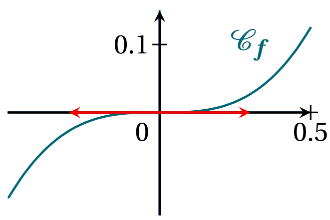
Propriété : *Extremum et dérivée*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a\in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$.

Remarque :

La réciproque de cette propriété est fausse.

Prenons par exemple la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.
Sa fonction dérivée, $f' : x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0 mais pourtant f n'admet pas d'extremum en 0 puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Étudier la fonction : $f(x)=4x^3-3x+1$