

# Fonctions dérivées

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

## I Nombre dérivé et tangente

### Définitions : Taux d'accroissement

Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux réels distincts appartenant à  $I$ . On appelle **accroissement moyen** de  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$  la quantité :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

En notant  $x_1 = a$  et  $x_2 = a + h$  avec  $h \neq 0$ , on obtient le **taux d'accroissement** :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

### Remarque :

L'**accroissement moyen** est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par les points  $(x_1 ; f(x_1))$  et  $(x_2 ; f(x_2))$ .

### Définition : Nombre dérivé

Si, lorsque  $h$  se rapproche de 0, **taux d'accroissement** se rapproche d'un réel  $\ell$ , alors :

- ☞ on dit que la fonction  $f$  est **dérivable** en  $a$  ;
- ☞ le réel  $\ell$  est appelé **nombre dérivé de  $f$  en  $a$** , que l'on note  $f'(a)$ .

On écrit alors :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a).$$

«  $\xrightarrow{h \rightarrow 0} \dots$  » se lit « **tend vers** ... lorsque  $h$  tend vers 0 ».

### Exemple 1 : Déterminer un nombre dérivé

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2$ . Déterminer s'il existe  $f'(3)$ .

#### Correction :

$$\text{Pour tout } h \neq 0 : \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h \quad \text{or, } 6 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6.$$

On obtient un nombre réel donc  $f$  est dérivable en 3 et  $f'(3) = 6$ .

### Définition : Tangente

Soient  $A$  et  $M$  deux points distincts d'une courbe. Géométriquement, la **tangente** à la courbe au point  $A$  est la position limite de la sécante  $(AM)$  lorsque  $M$  se rapproche de  $A$ .

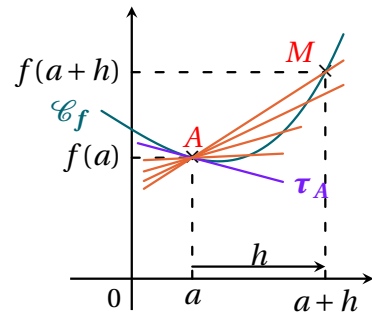
## Remarque :

Soit  $a$  un réel pour lequel  $f$  est dérivable et soit  $h \neq 0$  tel que  $a + h \in I$ . Les deux points  $A(a ; f(a))$  et  $M(a + h ; f(a + h))$  sont deux points distincts de  $\mathcal{C}_f$ . Le **taux d'accroissement** entre  $a$  et  $a + h$  représente le coefficient directeur de la droite  $(AM)$ , sécante à la courbe.

On note  $\tau_A$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$ .

Lorsque  $h \rightarrow 0$  :

- ☞  $M$  se rapproche de  $A$ ;
- ☞  $(AM)$  se rapproche de  $\tau_A$ ;
- ☞  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  se rapproche de  $f'(a)$ .



## Propriété : Coefficient directeur de la tangente

$f'(a)$  est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$ .

## Exemple 2 : Déterminer l'équation réduite d'une tangente

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 3x$ .

Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse 1.

### Correction :

- 1) On calcule  $f'(a)$  s'il existe.
- 2) Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la tangente a alors pour équation réduite  $y = f'(a)x + p$ .
- 3) On trouve  $p$  en utilisant les coordonnées d'un point de la tangente :  $A(a ; f(a))$ .

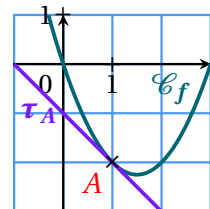
$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{[(1+h)^2 - 3(1+h)] - [1^2 - 3 \times 1]}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1.$$

Lorsque  $h \rightarrow 0$ , on a :  $h - 1 \rightarrow -1$ .

$f$  est donc dérivable en 1 et on a  $f'(1) = -1$ .

Ainsi,  $\tau_A$  a pour équation  $y = -x + p$ . On utilise maintenant le point  $A(1 ; f(1))$ , c'est-à-dire  $A(1 ; -2)$  et on obtient  $-2 = -1 + p$ , c'est-à-dire  $p = -1$ .

$\tau_A$  a donc pour équation réduite  $y = -x - 1$ .



## Exemple 3 : Lire graphiquement un nombre dérivé

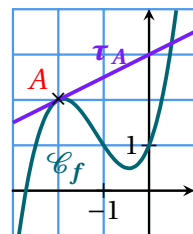
Soit  $f$  une fonction dont on donne la représentation graphique. La droite  $\tau_A$  est tangente à la courbe au point  $A$  d'abscisse  $-2$ .

Déterminer graphiquement  $f'(-2)$ .

### Correction :

$f'(-2)$  est le coefficient directeur de  $\tau_A$ . Graphiquement, on a  $f'(-2) = \frac{1}{2}$ .

(À partir du point  $A$ , on avance de deux unités vers la droite puis on monte d'une unité pour revenir sur la courbe...)



## Propriété : Équation réduite de la tangente

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  de courbe représentative  $\mathcal{C}_f$ . L'équation réduite de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

## II Fonction dérivée

### Définition : Fonction dérivée

Si, pour tout réel  $a \in I$ ,  $f'(a)$  existe, on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

On définit alors une nouvelle fonction  $f'$  sur  $I$  par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Cette fonction est appelée **fonction dérivée** de  $f$ .

### Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## III Dérivées et premières opérations

### Propriété : Dérivation : somme et produit par un nombre constant

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies et dérivables sur  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$ . Alors :

☞ La fonction  $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(u + v)' = u' + v'$ .

☞ La fonction  $ku : x \mapsto ku(x)$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(ku)' = ku'$ .

### Exemples 4 : Calculs de dérivées

1)  $f : x \mapsto \sqrt{x} + x^5$  est de la forme  $u + v$  avec  $u(x) = \sqrt{x}$  et  $v(x) = x^5$ . Ainsi :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4.$$

2)  $f : x \mapsto 8x^5$  est de la forme  $ku$  avec  $k = 8$  et  $u(x) = x^5$ . Ainsi :

$$f'(x) = ku'(x) = 8 \times 5x^4 = 40x^4.$$

3)  $f : x \mapsto 8x^5 + 2x^2 - 3$  est de la forme  $u + v + w$  avec  $u(x) = 8x^5$ ,  $v(x) = 2x^2$  et  $w(x) = -3$ . Ainsi :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 40x^4 + 4x + 0 = 40x^4 + 4x.$$