Fonctions affines, inverse et carrée

I Fonctions affines

Propriété : *Variations des fonctions affines*

Une **fonction affine** est définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto mx + p.$$

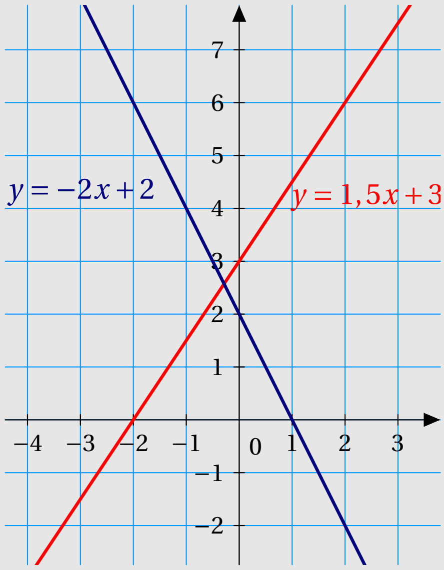
où m et p sont des réels.

- m est appelé **coefficient directeur**.
- p est appelé **ordonnée à l'origine**.
- Si $m > 0$, elle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, elle est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, elle est **constante** sur sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$mx+p$ $m>0$	↗	

x	$-\infty$	$+\infty$
$mx+p$ $m<0$	↘	

- Sa courbe représentative est une **droite**.



Remarques :

- Si $m = 0$, la fonction est constante.
- Si $p = 0$, la fonction est dite **linéaire**.

Définition : *Taux de variation*

On appelle **taux de variation** d'une fonction f entre deux nombres x_1 et x_2 le quotient $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Pour une fonction affine, il est contant quels que soient x_1 et x_2. Il s'agit du coefficient directeur m.

Remarque :

Cette formule du taux de variation est pratique pour calculer le coefficient directeur d'une fonction affine donnée graphiquement ou passant par des points particuliers.

Exemple 1 : *Étude d'une fonction affine*

Soit f la fonction affine dont la courbe représentative passe par les points $A(5;10)$ et $B(9;-2)$.
Donner l'expression algébrique de cette fonction puis étudier ses variations et son signe.

Correction :

La fonction f est affine donc son expression algébrique est de la forme : $f(x) = mx + p$.
Il faut trouver m et p.
Pour trouver rapidement le coefficient directeur m on utilise la formule du taux de variation :

$m = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ où $x_1 = 5$ et $f(x_1) = 10$ et de même $x_2 = 9$ et $f(x_2) = -2$.

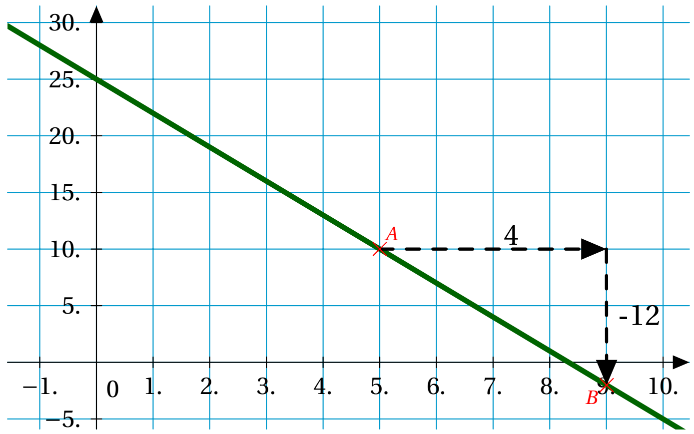
Ainsi, $m = \dfrac{-2-10}{9-5} = \dfrac{-12}{4} = -3$. *(Voir ce calcul sur le graphique suivant.)*

Il reste à trouver p :
L'expression algébrique de f est $f(x) = -3x + p$.
On sait que la courbe représentative de f passe par le point $A(5;10)$. Cela signifie que $f(5) = 10$.
On obtient donc une équation : $10 = -3 \times 5 + p$.

$$\begin{aligned} 10 &= -15 + p \\ 10 + 15 &= p \\ 25 &= p \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression algébrique de f est : $f(x) = -3x + 25$.
Pour les variations, le **coefficient directeur est négatif donc f est décroissante** sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$-3x+25$	$\searrow$	



Pour le signe, il faut calculer l'antécédent de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -3x + 25 &= 0 \\ -3x &= -25 \\ x &= \frac{-25}{-3} = \frac{25}{3}. \end{aligned}$$

Puisque f est décroissante, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{25}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

II Fonction inverse

Propriété : *Variations de la fonction inverse*

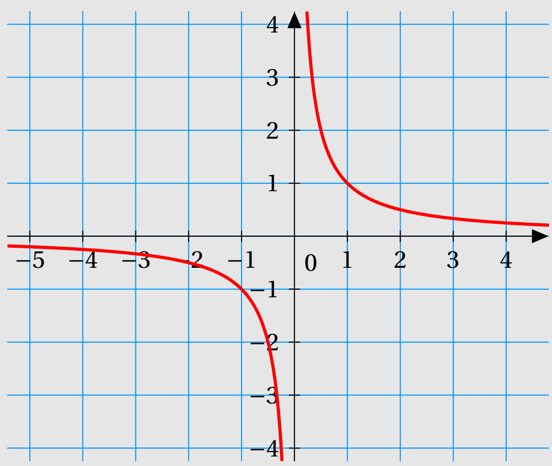
La **fonction inverse** est définie par $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

- Elle est **strictement décroissante** sur $]-\infty;0[$.
- Elle est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	||	$\searrow$

- Elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Sa courbe représentative s'appelle une **hyperbole**.



Remarques :

1) La fonction inverse possède une valeur dite « **interdite** ». La division par 0 étant impossible, 0 ne fait pas partie de l'ensemble de définition de la fonction inverse.
2) Autre formulation de la variation de la fonction inverse :
   - Deux nombres négatifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire.
     Si $x_1 < x_2 < 0$ alors $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$
   - Deux nombres positifs et leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire.
     Si $0 < x_1 < x_2$ alors $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$

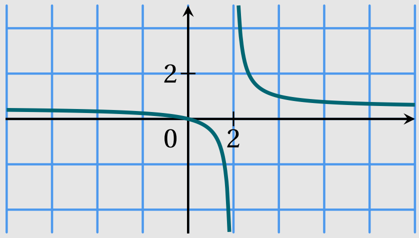
Définition : *Fonction homographique*

On appelle **fonction homographique** toute fonction h qui peut s'écrire comme quotient de fonctions affines. Soit a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$: $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Propriété :

Une fonction homographique est définie sur $\mathbb{R}$ privé de la valeur qui annule son dénominateur dite « **valeur interdite** ».

Sa courbe représentative est une **hyperbole** qui comporte deux branches disjointes.



Exemple 2 : *Donner le domaine de définition d'une fonction homographique*

Quel est le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+4}{3x-7}$?

Correction :

Pour identifier ce domaine de définition, il suffit de trouver la **valeur interdite**.

Recherche de la valeur interdite : $3x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+4}{3x-7}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.

III La fonction carrée

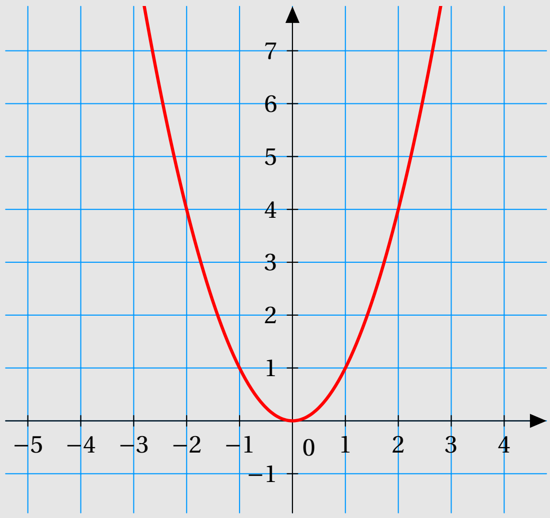
Propriété : *Variations de la fonction carrée*

La **fonction carrée** est définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$.

- ☞ Elle est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$.
- ☞ Elle est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.
- ☞ Elle admet, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

- ☞ Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ☞ Sa courbe représentative s'appelle une **parabole**.

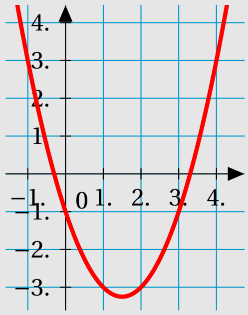


Remarques :

1) La fonction carrée est toujours **positive** sur $\mathbb{R}$.
2) Autre formulation de la variation de la fonction carrée :
   - Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire.
     Si $x_1 < x_2 < 0$ alors $x_1^2 > x_2^2$
   - Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.
     Si $0 < x_1 < x_2$ alors $x_1^2 > x_2^2$

Définitions : *Fonction du second degré et parabole*

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ est appelée **fonction polynôme du second degré** ou, simplement, fonction du second degré.
La courbe représentative d'une fonction du second degré est appelée une **parabole**.



Exemple 3 : *Étude graphique*

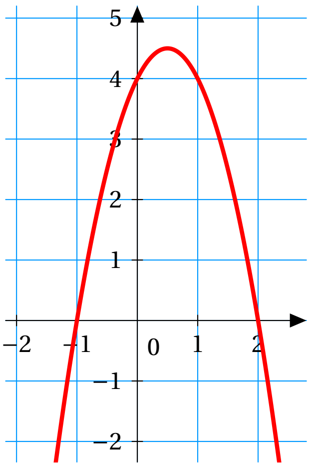
On veut résoudre l'inéquation $-2x^2 + 2x + 4 \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$.

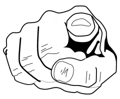
Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$.

Lorsque l'on dispose de la courbe représentative de la fonction f ci-dessous, on peut en déduire le **tableau de signes**.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [-1\,;\,2]$.

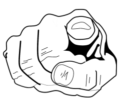




1. Quel est le maximum de cette fonction ? En quelle valeur est-il atteint ?
2. Dresser le tableau de variation de cette fonction.

Remarques :

1) Toute fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où
   Cette forme est appelée la **forme canonique**.
2) Certaines fonctions du second degré peuvent s'écrire sous une forme appelée **forme factorisée**.
   Il existe deux types de **formes factorisées** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $f(x) = a(x - x_0)^2$.



Soient $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = (x-3)(x+1)$ et $h(x) = (x-1)^2 - 4$.

Montrer que ces trois fonctions sont identiques puis dresser le tableau de signes et de variations.