Fonctions dérivées

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

I Nombre dérivé et tangente

Définitions : *Taux d'accroissement*

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts appartenant à I. On appelle **accroissement moyen** de f entre x_1 et x_2 la quantité :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

En notant $x_1 = a$ et $x_2 = a+h$ avec $h \neq 0$, on obtient le **taux d'accroissement** :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarque :

L'**accroissement moyen** est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par les points $(x_1\,;\,f(x_1))$ et $(x_2\,;\,f(x_2))$.

Définition : *Nombre dérivé*

Si, lorsque h se rapproche de 0, **taux d'accroissement** se rapproche d'un réel ℓ, alors :

- on dit que la fonction f est **dérivable** en a ;
- le réel ℓ est appelé **nombre dérivé de f en** a, que l'on note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a).$$

« $\underset{h\to 0}{\longrightarrow}$ ... » se lit « **tend vers** ... lorsque h tend vers 0 ».

Exemple 1 : *Déterminer un nombre dérivé*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Déterminer s'il existe $f'(3)$.

Correction :

Pour tout $h \neq 0$: $\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$ or, $6+h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 6$.

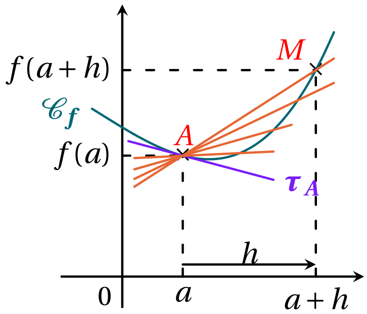
On obtient un nombre réel donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

Définition : *Tangente*

Soient A et M deux points distincts d'une courbe. Géométriquement, la **tangente** à la courbe au point A est la position limite de la sécante (AM) lorsque M se rapproche de A.

Remarque :

Soit a un réel pour lequel f est dérivable et soit $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$.
Les deux points $A(a\,;\, f(a))$ et $M(a+h\,;\, f(a+h))$ sont deux points distincts de $\mathscr{C}_f$. Le **taux d'accroissement** entre a et $a+h$ représente le coefficient directeur de la droite (AM), sécante à la courbe.
On note τ_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.



Lorsque $h \to 0$:

- ☞ M se rapproche de A ;
- ☞ (AM) se rapproche de τ_A ;
- ☞ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche de $f'(a)$.

Propriété : *Coefficient directeur de la tangente*

$f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Exemple 2 : *Déterminer l'équation réduite d'une tangente*

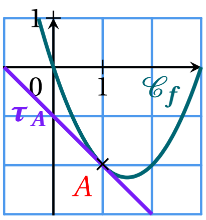
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

Correction :

1) On calcule $f'(a)$ s'il existe.
2) Si f est dérivable en a, la tangente a alors pour équation réduite $y = f'(a)x + p$.
3) On trouve p en utilisant les coordonnées d'un point de la tangente : $A(a\,;\, f(a))$.

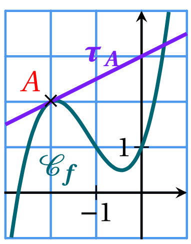
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{[(1+h)^2-3(1+h)]-[1^2-3\times 1]}{h} = \dfrac{h^2-h}{h} = h-1.$

Lorsque $h \to 0$, on a : $h-1 \to -1$.
f est donc dérivable en 1 et on a $f'(1) = -1$.
Ainsi, τ_A a pour équation $y = -x + p$. On utilise maintenant le point $A(1\,;\, f(1))$, c'est-à-dire $A(1\,;\,-2)$ et on obtient $-2 = -1 + p$, c'est-à-dire $p = -1$.
τ_A a donc pour équation réduite $y = -x - 1$.



Exemple 3 : *Lire graphiquement un nombre dérivé*

Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique. La droite τ_A est tangente à la courbe au point A d'abscisse -2.
Déterminer graphiquement $f'(-2)$.



Correction :

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de τ_A. Graphiquement, on a $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$.
(À partir du point A, on avance de deux unités vers la droite puis on monte d'une unité pour revenir sur la courbe...)

Propriété : *Équation réduite de la tangente*

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative $\mathscr{C}_f$. **L'équation réduite de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

II Fonction dérivée

Définition : *Fonction dérivée*

Si, pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable sur I.
On définit alors une nouvelle fonction f' sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Cette fonction est appelée **fonction dérivée** de f.

Propriété : *Dérivées des fonctions usuelles*

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

III Dérivées et opérations

Propriété : *Dérivation : somme et produit*

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- ☞ La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u + v)' = u' + v'$.
- ☞ La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.
- ☞ La fonction $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemples 4 : *Calculs de dérivées*

1) $f : x \mapsto \sqrt{x} + x^5$ est de la forme $u + v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^5$. Ainsi :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4.$$

2) $f : x \mapsto 8x^5$ est de la forme ku avec $k = 8$ et $u(x) = x^5$. Ainsi :

$$f'(x) = ku'(x) = 8 \times 5x^4 = 40x^4.$$

3) $f : x \mapsto 8x^5\sqrt{x}$ est de la forme uv avec $u(x) = 8x^5$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ainsi :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 40x^4\sqrt{x} + 8x^5\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{40x^4x + 4x^5}{\sqrt{x}} = \frac{44x^5}{\sqrt{x}}.$$

Propriété : *Dérivation : inverse et quotient*

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I telles que v ne s'annule pas sur I. Alors :

- ☞ La fonction $\frac{1}{v} : x \mapsto \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- ☞ La fonction $\frac{u}{v} : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemples 5 : *Déterminer la fonction dérivée d'une fonction*

- ☞ On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, produit, inverse, quotient de fonctions usuelles).
- ☞ On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité.
- ☞ On dérive séparément chacune des fonctions composant f.
- ☞ On calcule $f'(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5$

2) $g(x) = x\sqrt{x}$

3) $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$

4) $i(x) = \frac{x-3}{2x+4}$

Correction :

1) f est de la forme $u + v + w$ (somme) avec $u(x) = 7x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $w(x) = 5$.
Ces trois fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.
De plus, $u'(x) = 7 \times (3x^2) = 21x^2$, $v'(x) = -2 \times (2x) = -4x$ et $w'(x) = 0$.
Ainsi, pour tout réel x :

$$f'(x) = 21x^2 - 4x.$$

2) g est de la forme uv (produit) avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, il en est de même pour g.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

3) h est de la forme $\frac{1}{v}$ (inverse) avec $v(x) = x^2 + 1$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $v'(x) = 2x$. Ainsi, pour tout réel x :

$$h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

4) i est de la forme $\frac{u}{v}$ (quotient) avec $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2x + 4$. Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ mais v s'annule en -2. Donc i est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$. Ainsi, pour tout $x \neq -2$:

$$i'(x) = \frac{1 \times (2x+4) - (x-3) \times 2}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}.$$