Les triangles

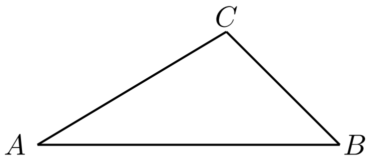
I Inégalité triangulaire

Propriété :

> Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple :

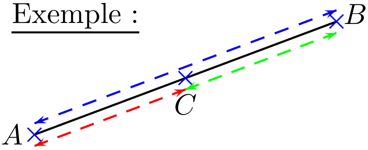
Dans le triangle ABC, on a :
- ➩ $AB < AC + CB$
- ➩ $AC < AB + BC$
- ➩ $BC < BA + AC$



Propriété : Cas d'égalité

> Si un point C appartient au segment $[AB]$, alors : $AC + CB = AB$

Exemple :



$$AC + CB = AB$$

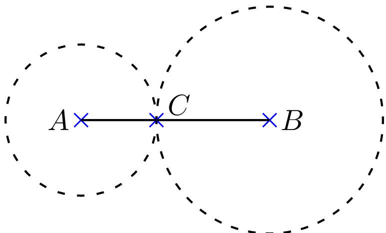
Propriété réciproque :

> Si trois points A, B et C sont tels que $AC + CB = AB$, alors le point C appartient au segment $[AB]$.

Exemple :

Placer trois points A, B et C tels que :
$AB = 2,5cm$, $AC = 1cm$ *et* $BC = 1,5cm$.

On remarque que :
$1cm + 1,5cm = 2,5cm$.
Donc les trois points sont alignés.



On résume les deux premiers cas par la propriété suivante :

W.Laidet

Propriété : Inégalité triangulaire

Si A, B et C sont trois points quelconques du plan, on a l'inégalité :
$AC \leqslant AB + BC$

Conséquence :

a, b et c sont trois longueurs données, où a est la plus grande de ces longueurs.

☞ Si $a < b + c$, alors on peut construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs : a, b et c.

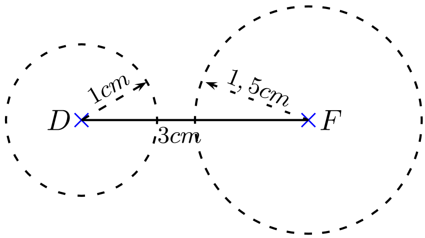
☞ Si $a > b + c$, alors on ne peut pas construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs : a, b et c.

Exemple :

Peut-on construire un triangle DEF sachant que $ED = 1cm$, $EF = 1,5cm$ et $DF = 3cm$?

On compare la longueur du plus grand côté et la somme des longueurs des deux autres côtés :

➪ $DF = 3cm$ et
➪ $ED + EF = 1cm + 1,5cm = 2,5cm$.
On a $DF > ED + EF$.
On ne peut donc pas construire un tel triangle.

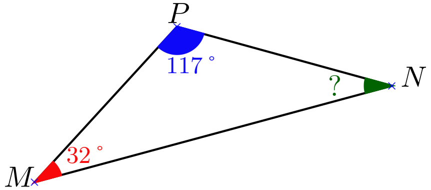


II Somme des mesures des angles d'un triangle

Propriété :

Dans un triangle, la **somme** des mesures des angles est **égale à** 180 °.

Exemple : *Dans la figure ci-dessous, calculer la mesure de l'angle $\widehat{MNP}$.*



Dans le triangle MNP, on a :
$\widehat{MPN} + \widehat{NMP} = 117° + 32° = 149°$.

Or, dans un triangle, la **somme** des mesures des angles est **égale à** 180 °.

Donc $\widehat{MNP} = 180° - 149° = 31°$.

W.Laidet

III Cercle circonscrit à un triangle

Définition :

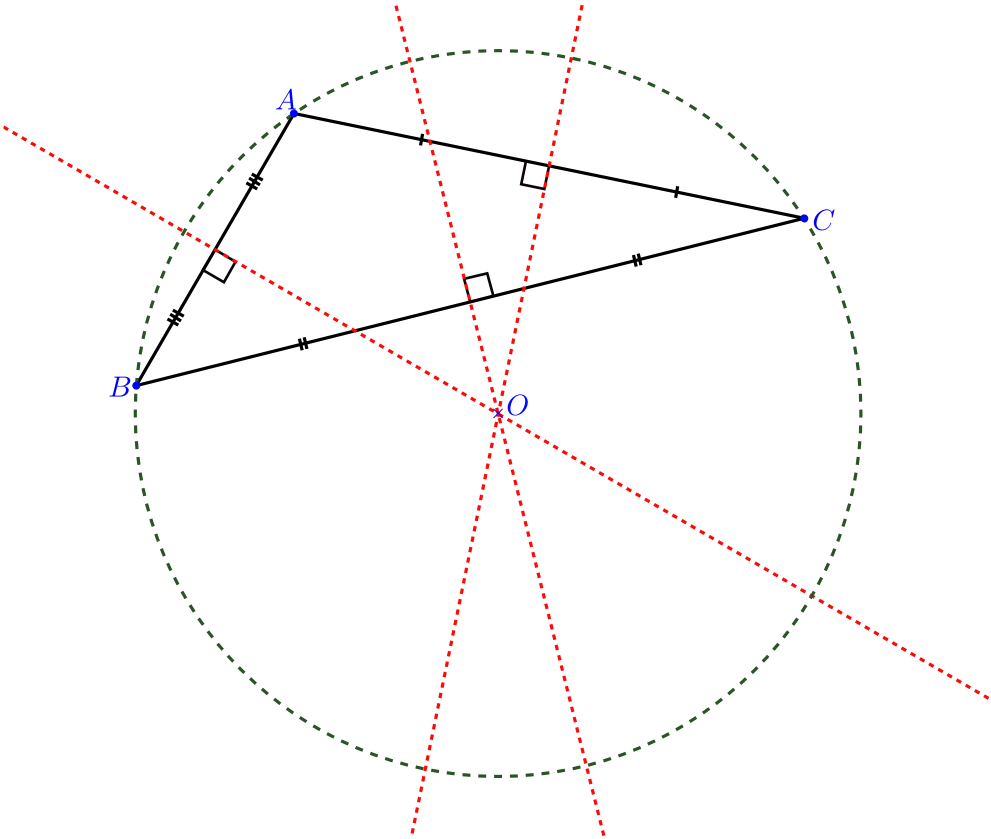
La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et lui étant perpendiculaire.

Propriétés :

Dans un triangle, les trois médiatrices se coupent en un même point : on dit qu'elles sont **concourantes**.
Ce point est le centre d'un cercle qui passe par les trois sommets du triangle.
Ce cercle est le **cercle circonscrit au triangle**.

Exemple :

Les médiatrices du triangle ABC sont concourantes au point O.
Ce point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



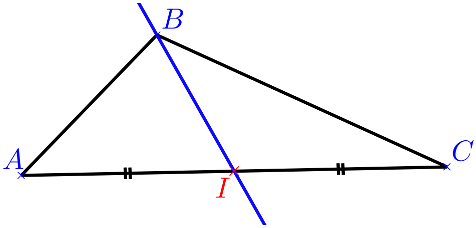
IV Médianes et hauteurs d'un triangle

IV.1 Médianes d'un triangle

Définition :

> Dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Exemple :



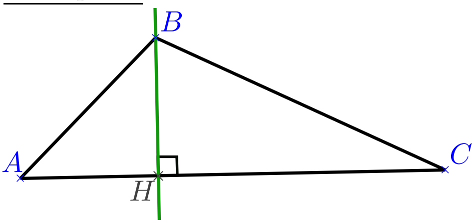
Dans le triangle ABC, la droite (BI) est la **médiane** issue du sommet B.

IV.2 Hauteurs d'un triangle

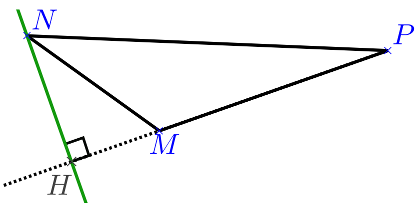
Définition :

> Dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Exemples :



Dans le triangle ABC, la droite (BH) est la **hauteur** issue du sommet B.



Dans le triangle MNP, la droite (NH) est la **hauteur** issue du sommet N.