

Arithmétique

I Diviseurs communs et PGCD

I.1 Diviseurs d'un entier naturel

Définition

Pour deux nombres entiers naturels non nuls a et d :

Dire que d est un diviseur de a signifie qu'il existe un entier k tel que

$$a = d \times k$$

Dans ce cas, k étant non nul, c 'est aussi un diviseur de a .

Exemple :

7 est un diviseur de 84 car $84 = 7 \times 12$.

Par conséquent, 12 est aussi un diviseur de 84.

Remarque :

1 est un diviseur de tout nombre entier naturel n , car $n = n \times 1$.

I.2 Diviseurs communs à deux nombres entiers

Définition

☞ Un diviseur commun à deux entiers naturels a et b est un entier naturel qui divise à la fois a et b .

☞ Le plus grand entier qui divise à la fois a et b est appelé le **Plus Grand Commun Diviseur** de a et b , et est noté $PGCD(a; b)$.

Exemple 1 :

diviseurs de 12

1	12
2	6
3	4

diviseurs de 18

1	18
2	9
3	6

☞ Les diviseurs communs à 12 et 18 sont : 1, 2, 3, 6.

☞ $PGCD(12; 18) = 6$.

Exemple 2 :

diviseurs de 45

1	45
3	15
5	9

diviseurs de 28

1	28
2	14
4	7

☞ 1 est le seul diviseur commun à 45 et 28.

☞ $PGCD(45; 28) = 1$.

II Nombres premiers entre eux

Définition

On dit que deux nombres entiers (non nuls) a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exemples :

$$\nabla PGCD(12; 18) = 6$$

⇒ 12 et 18 ne sont pas des nombres premiers entre eux.

$$\nabla PGCD(45; 28) = 1$$

⇒ 45 et 28 sont deux nombres premiers entre eux.

III Fractions irréductibles

Définition

Une fraction est irréductible si elle est simplifiée le plus possible, c'est-à-dire si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple :

↯ $\frac{45}{28}$ est une fraction irréductible puisque 45 et 28 sont des nombres premiers entre eux.

Propriété :

Si on simplifie une fraction par le $PGCD$ de son numérateur et de son dénominateur, alors on obtient une fraction irréductible.

Exemple :

↯ $\frac{12}{18}$ n'est pas une fraction irréductible car 12 et 18 ne sont pas des nombres premiers entre eux. On peut donc la simplifier :

$$\Rightarrow PGCD(12; 18) = 6.$$

$$\Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$$