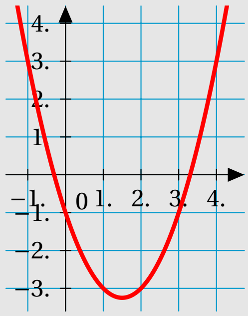
Fonctions du second degré

I Fonctions du second degré

Définitions : *Fonction du second degré et parabole*

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ est appelée **fonction polynôme du second degré** ou, simplement, fonction du second degré.
La courbe représentative d'une fonction du second degré est appelée une **parabole**.



Exemples 1 :

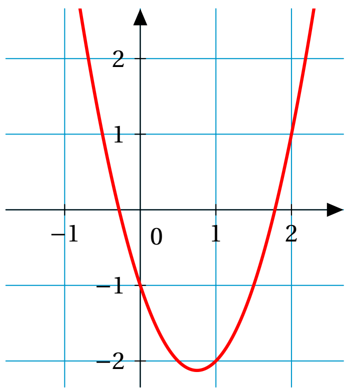
Parmi les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

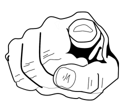
- $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est l'expression d'une fonction polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$;
- $f_2(x) = \frac{1}{2}x - 2$ n'est pas l'expression d'une fonction du second degré, c'est une fonction affine ;
- $f_3(x) = x^3 - x^2 + 3x - 6$ n'est pas l'expression d'une fonction du second degré, c'est une fonction de degré 3.

Exemple 2 : *Graphique*

Voici ci-contre la représentation graphique de la fonction :

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 1$$





- Quelles valeurs de x annullent cette fonction ?
- Quel est le minimum atteint par cette fonction ?

On voit apparaître des problèmes de précisions lors d'une étude graphique.

II Variations et recherche de minimum/maximum : La forme canonique

Théorème : *Forme canonique*

Toute fonction f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$. Cette forme est appelée la **forme canonique**.

Propriété : *Sens de variations*

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Le sens de variation d'une fonction dépend du signe de a.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f avec $a > 0$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f avec $a < 0$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Propriété : *Extremum*

Soit a, α, β trois nombres réels.

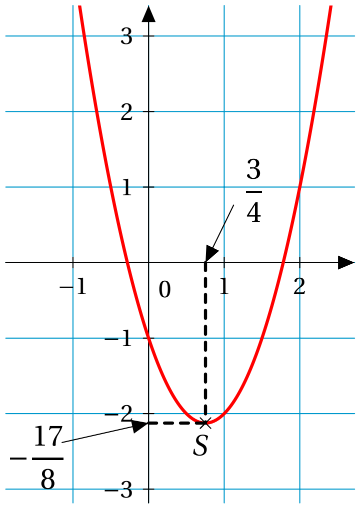
f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f admet β comme extremum. Il est atteint pour $x = \alpha$.

- ☞ C'est un maximum si a est négatif.
- ☞ C'est un minimum si a est positif.

Exemple 3 : *Recherche d'un minimum d'une fonction du second degré*



On reprend la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$.

Pour déterminer de façon exacte son minimum, on utilise la **forme canonique** :

La forme canonique de cette fonction est : $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$.

Le sommet de la parabole représentant cette cette fonction est donc :

$$S\left(\frac{3}{4}; -\frac{17}{8}\right)$$

Retrouver cette forme canonique par le calcul.

Propriété : *Axe de symétrie d'une parabole*

Soit a, α, β trois nombres réels et f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

La courbe représentative de cette fonction est une parabole qui admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = \alpha$.

Exemple 4 : *Étudier les variations une fonction trinôme du second degré*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-0,25)^2 - 8$. Déterminer :

1) son sens de variation ; 2) son extremum ; 3) le signe de la fonction.

Correction :

Dans le cas de la fonction f :

- $\alpha = 0,25$
- $\beta = -8$
- $a = -2$

1) a est négatif donc la fonction f est croissante sur $]-\infty;0,25[$ et décroissante sinon.

2) Elle admet un maximum en $x = \alpha = 0,25$. Il vaut $f(0,25) = -8$.

x	$-\infty$	0,25	$+\infty$
$f(x)$	↗	-8	↘

3) La fonction f est négative sur $\mathbb{R}$.

III Signe d'un fonction de degré deux : La forme factorisée (ou pas...)

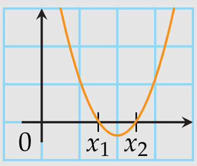
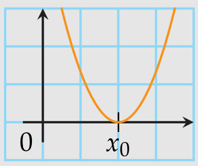
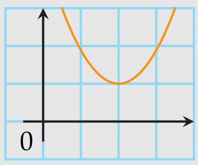
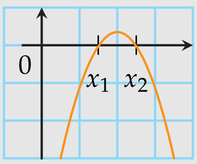
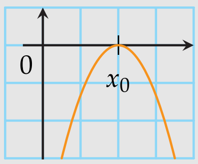
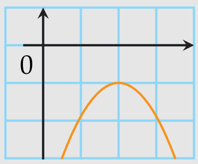
Propriété : *Forme factorisée*

Certaines fonctions du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ peuvent s'écrire sous une forme appelée **forme factorisée**.
Il existe deux types de **formes factorisées** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $f(x) = a(x - x_0)^2$.

L'existence ou non de **forme factorisée** permet de connaître les éventuels points d'intersections de la parabole avec l'axe des abscisses.

Propriété : *Signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$*

Le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a et de l'intersection (ou non) avec l'axe des abscisses :

<table>
<tr><th></th><th>$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$</th><th>$f(x) = a(x - x_0)^2$</th><th>Pas de forme factorisée</th></tr>
<tr><td>Signe de
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a > 0$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+ 0 - 0 +</td></tr></table>

</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+ 0 +</td></tr></table>

</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>+</td></tr></table>

</td></tr>
<tr><td>Signe de
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a < 0$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>− 0 + 0 −</td></tr></table>

</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>− 0 −</td></tr></table>

</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>−</td></tr></table>

</td></tr>
</table>

Remarques :

Le signe d'un trinôme ax^2+bx+c dépend de deux choses :

- ☞ **du signe de a** : le sommet est-il en haut ou en bas de la courbe ?
- ☞ **de l'existence (ou non) de points d'intersections avec l'axe des abscisses :** Le trinôme ax^2+bx+c est toujours du même signe que a sauf entre ces éventuels points d'intersections.

Avoir en tête l'allure de la fonction $f(x)=x^2$ permet de retrouver une partie de cette propriété.

Exemple 5 : *Étude d'une fonction de degré deux*

Soit f la fonction définie par $\quad f(x)=x^2-2x-3$.
Dresser le tableau de signes et de variations de cette fonction.

Indication : $\quad x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=(x-1)^2-4$.

Correction :

f est de la forme ax^2+bx+c. Sa courbe représentative est donc une **parabole**.

Le coefficient a est égal à 1 *(on ne le voit pas)*.
a est donc positif, ainsi, la parabole a son **sommet en bas**.

D'après l'indication, f possède une forme factorisée : $f(x)=(x-3)(x+1)$.
Ainsi, la parabole coupe l'axe des abscisses en 3 et -1.

On peut donc dresser son tableau de signes :

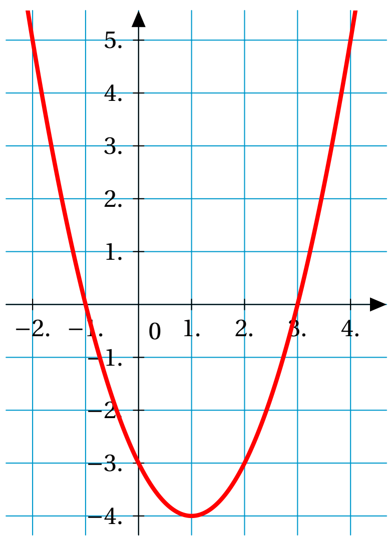
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Pour dresser le tableau de variations, on utilise la forme canonique : $\quad f(x)=(x-1)^2-4$.

a étant positif (toujours égal à 1), cette fonction possède un **minimum** -4 atteint au point d'abscisse 1.

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-4	↗	



1. Retrouver graphiquement tous ces résultats.
2. Démontrer les égalités :

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=(x-1)^2-4.$$