Automatisation : Les fonctions

I Définitions

Définitions : *Fonction, image, antécédent*

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres réels. Définir une **fonction** f sur $\mathscr{D}$ revient à associer, à chaque réel x de $\mathscr{D}$, un réel *et un seul*, appelé **image** de x.

- $\mathscr{D}$ est l'**ensemble de définition de** f. $\mathscr{D}$ peut être l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, ou être constitué d'une ou plusieurs parties de $\mathbb{R}$.
- Soit $a \in \mathscr{D}$. L'**image** du nombre a par la fonction f est **unique** et se note $f(a)$.
  $f(a)$ se lit « f de a ». La notation suivante se rencontre également $f : a \longmapsto f(a)$.
- Si b est l'image de a, on a l'égalité $f(a) = b$ et a est un **antécédent** de b par la fonction f.

II Différentes représentations d'une fonction

Définition : *Expression algébrique*

Soit f une fonction, $\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $x \in \mathscr{D}$.
L'**expression algébrique** d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple 1 : *Déterminer l'expression algébrique d'une fonction*

Une fonction est déterminée par le programme de calcul suivant :

- choisir un nombre ;
- lui ôter 6 ;
- prendre le carré du résultat.

Trouver l'expression définissant cette fonction.

Correction :

On note g la fonction qui à un nombre x, lui associe le résultat du programme de calcul.
Après avoir choisi un nombre x, le programme lui ôte 6.
On obtient donc $x - 6$.
Ensuite le programme élève ce nombre au carré soit : $(x-6)^2$.
Donc la fonction liée à ce programme de calcul est définie par : $g : x \longmapsto (x-6)^2$.

Définition : *Tableau de valeurs*

Soit f une fonction, $\mathscr{D}$ son ensemble de définition et x un élément de $\mathscr{D}$.
Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Remarque :

Un tableau de valeurs n'est pas unique. Il dépend du choix des valeurs de x sur la première ligne (ou colonne).

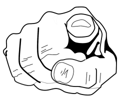
Exemple 2 : *Construire un tableau de valeurs*

Dresser un tableau de 10 valeurs de la fonction g définie par $g(x) = (2x-3)^2$ à partir de $x = -5$ avec un pas de 1.

Correction :

Le pas de 1 signifie qu'il y a une différence de 1 entre chaque valeur de x de la première ligne.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	169	121	...	49	25	9	1	1	9	...



Complète le tableau de valeurs ci-dessus.

Définition : *Courbe représentative d'une fonction*

La **courbe représentative de la fonction** f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.
Elle est souvent notée $\mathscr{C}_f$.
L'**équation de cette courbe représentative** est : $y = f(x)$.

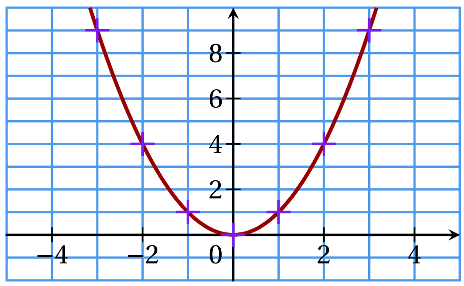
Exemples 3 : *Tracer une courbe représentative*

Tracer la **parabole** représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

Correction :

On établit un tableau de valeurs de la fonction f, on reporte les coordonnées des points dans un repère puis on les relie à la main.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



III Variations d'une fonction

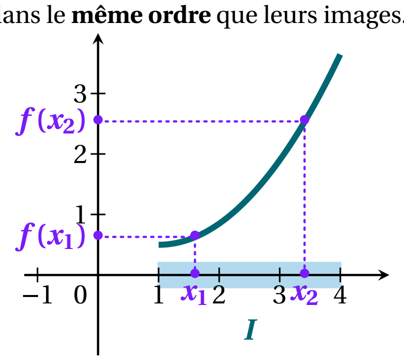
Définitions : *Croissance, décroissance sur un intervalle*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_1 et x_2 deux nombres de I.

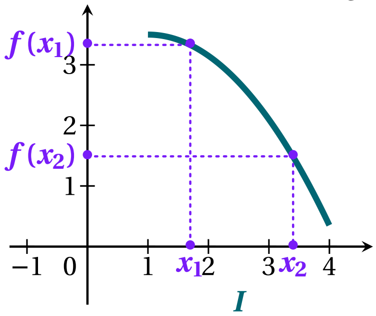
- ☞ Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ alors f est dite **croissante** sur I.
- ☞ Si $x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ alors f est dite **décroissante** sur I.

Exemples 4 :

f est croissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans le **même ordre** que leurs images.



f est décroissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans l'**ordre inverse** de leurs images.

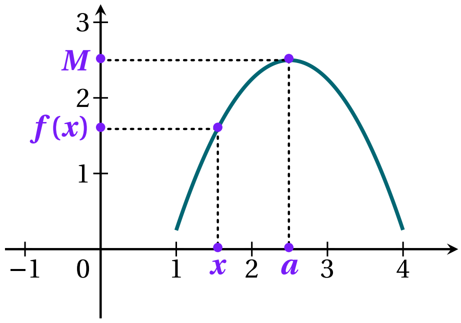


Définitions : *Maximum, minimum et extremum d'une fonction*

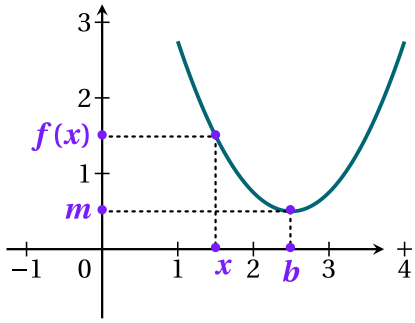
- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leqslant M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en b sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geqslant m$ et $m = f(b)$
- Un **extremum** est le terme générique pour désigner un maximum ou un minimum.

Exemples 5 :

Exemple de **maximum** :



Exemple de **minimum** :



Définition : *Tableau de variations*

Un **tableau de variations** regroupe toutes les informations concernant les variations d'une fonction sur son domaine de définition.

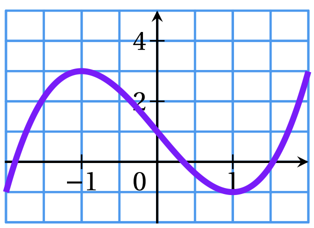
Remarque :

Un tableau de variations comporte deux lignes.

- Aux extrémités de la 1^{e} ligne, on trouve les **bornes** du domaine de définition de la fonction. Entre les bornes, on place d'**éventuelles** valeurs particulières.
- Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la 2^{e} ligne par **une ou plusieurs flèches** sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
- Les valeurs pour lesquelles la fonction **n'est pas définie** sont indiquées par une double barre verticale sur la deuxième ligne.
- On indique **au bout des flèches** les images des valeurs de la 1re ligne.

Exemple 6 : *Dresser un tableau de variations*

Dresser le tableau de variations de la fonction définie sur $[-2;2]$ par la courbe ci-dessous.



Correction :

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	?	↗	3	↘	-1	↗	?

Complète le tableau de variations ci-dessus.