Les suites

I Notion de suite

Définition : *Suite numérique*

Une **suite**, notée u est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.
Le **terme d'indice** n ou de **rang** n, noté $u(n)$ ou u_n est l'image d'un nombre entier naturel n par u.

Exemple 1 : *Suite des nombres impairs*

Voici la suite des nombres impairs : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7\ldots$
Le terme d'indice 0 de la suite u est 1, celui d'indice 1 est 3…

II Modes de génération d'une suite

Définition : *Suite définie de façon explicite*

Définir une suite par une **formule explicite**, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n.

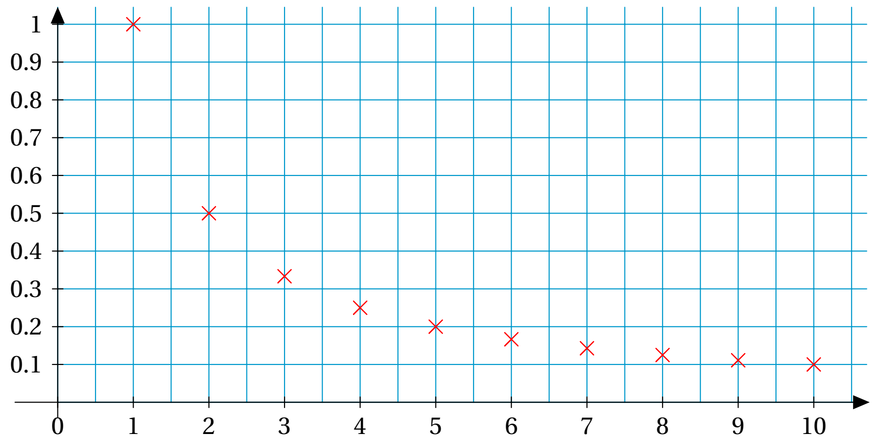
Remarque : Cela signifie que l'on peut calculer un terme de la suite sans connaître les termes précédents.

Exemple 2 : *Étudier une suite de façon explicite*

Calculer, puis représenter les dix premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction :

On remarque que cette suite n'est pas définie pour $n = 0$.
Pour calculer le deuxième terme, u_2, on effectue le calcul : $u_2 = \dfrac{1}{2} = 0,5\ldots$



n	u_n
1	1,00
2	0,50
3	0,33
4	0,25
5	0,20
6	0,17
7	0,14
8	0,13
9	0,11
10	0,10

Définition : *Suite définie par une relation de récurrence*

Définir une suite par une **relation de récurrence**, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.

Remarque :

On ne peut alors calculer un terme que si l'on connaît le précédent, il faut calculer de proche en proche tous les termes à partir du premier.

Exemple 3 : *Étudier une suite définie par récurrence*

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n + 6$.
Calculer les premiers termes de cette suite.

Correction :

On a déjà $U_0 = 2$. On peut ensuite calculer u_1 : $u_1 = 3 \times u_0 + 6 = 3 \times 2 + 6 = 12$

Pour u_2 : $u_2 = 3 \times u_1 + 6 = 3 \times 12 + 6 = 42$

Pour u_3 : $u_3 = 3 \times u_2 + 6 = 3 \times 42 + 6 = 132\dots$

Remarque :

Une relation de récurrence peut aussi faire intervenir plusieurs des termes précédents, par exemple la célèbre **suite de Fibonacci** : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Pour définir la suite, la donnée du premier terme ne suffit pas, il faut en donner plusieurs.

Ici par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

III Les suites arithmétiques

Définition : *Suite arithmétique*

On dit qu'une **suite** (u_n) **est arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel, on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique (u_n).

Remarque :

Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence ; on ajoute toujours le même nombre.

Pour la définir, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemple 4 : *Une suite arithmétique*

La suite définie par $\begin{cases} u_3 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ pour $n \geq 3$ est une suite arithmétique de raison -5.

Remarque :

Pour **montrer qu'une suite est arithmétique** :

- ☞ On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.
- ☞ On montre que cette différence est constante.

Exemple 5 : *Démontrer qu'une suite est arithmétique*

Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 + 3n$ est arithmétique.

Correction :

Pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 + 3(n+1) - (2+3n) \\ &= 2 + 3n + 3 - 2 - 3n \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

Propriétés : *Forme explicite d'une suite arithmétique*

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = u_0 + nr.$$
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous les entiers naturels n et k, on a :
$$u_n = u_k + (n-k)r.$$

Exemple 6 : *Déterminer la forme explicite d'une suite arithmétique*

1) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -4. Déterminer sa forme explicite.
2) Soit la suite arithmétique (v_n) de raison 5 et telle que $v_{10} = 7$. Déterminer sa forme explicite.

Correction :

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = 3 - 4n$.
2) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_{10} + (n-10)r = 7 + 5(n-10) = 7 + 5n - 50 = 5n - 43$.

IV Les suites géométriques

Définition : *Suite géométrique*

On dit qu'une **suite** (u_n) **est géométrique** s'il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n \times q = qu_n$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique (u_n).

Remarque :

Une suite géométrique est définie par récurrence ; on multiplie toujours par le même nombre.
Pour définir une suite géométrique, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemple 7 : *de suite géométrique*

La suite des puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32...) est géométrique de raison 2.
On peut définir cette suite par $u_n + 1 = 2 \times u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$.

Remarque :

Pour **montrer qu'une suite est géométrique** :

- On calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
- On montre que ce quotient est constant.

Théorème : *Forme explicite d'une suite géométrique*

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n on a :
$$u_n = u_0 q^n.$$
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et k on a :
$$u_n = u_k q^{n-k}.$$

Exemple 8 : *Déterminer la forme explicite d'une suite géométrique*

1) Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. Déterminer sa forme explicite.
2) Soit la suite géométrique (v_n) telle que $v_4 = 21$ et de raison 3. Déterminer sa forme explicite.

Correction :

1) $u_n = 1 \times 2^n = 2^n$ *(Cela correspond à la suite des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16...)*
2) $v_n = v_4 \times q^{n-4} = 21 \times 3^{n-4}$

V Sens de variations d'une suite

Définition : *Suite croissante, décroissante, monotone*

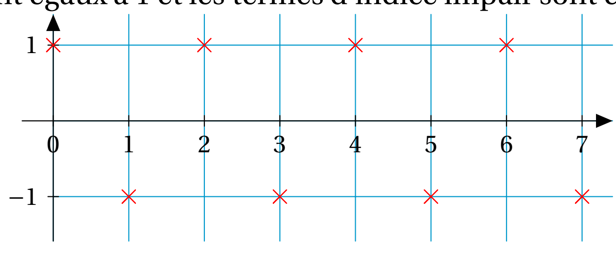
- On dit qu'une suite u est **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- On dit qu'une suite u est **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- On dit qu'une suite u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

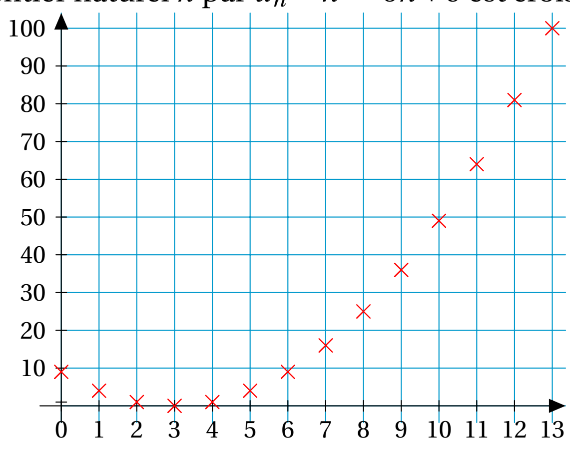
- On définit de même une suite strictement monotone en utilisant des inégalités strictes.
- Une suite peut être monotone à partir d'un terme (d'un certain rang).

Exemples 9 : *Variations de suites*

- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.
  Les termes d'indice pair sont égaux à 1 et les termes d'indice impair sont égaux à -1.



- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 9$ est croissante à partir de l'indice 3.

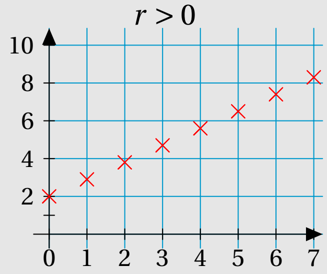


Propriété : *Cas d'une suite arithmétique*

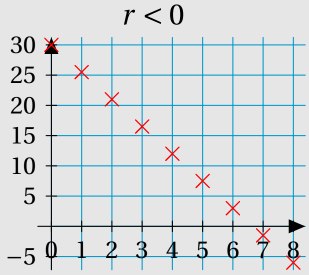
Soit la suite u **arithmétique** de raison r non nulle et de premier terme u_0.

Elle modélise une **évolution linéaire**. Les **variables absolue sont constantes**, égales à r.

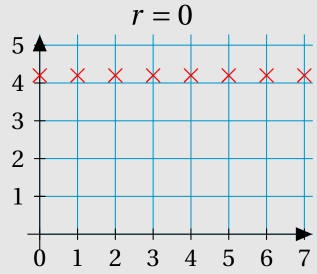
- ☞ Si r est négatif, alors la suite u est décroissante.
- ☞ Si r est positif, alors la suite u est croissante.



u est croissante



u est décroissante



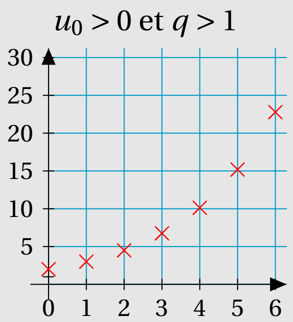
u est constante

Propriété : *Cas d'une suite géométrique*

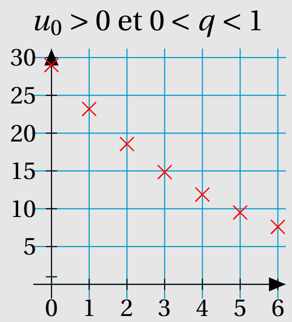
Soit la suite u géométrique de raison q et de premier terme u_0.

Elle modélise une **évolution exponentielle**. Les **variations relatives sont constantes**, égales à $q-1$.

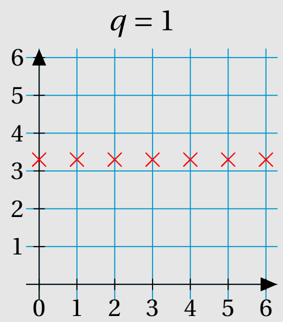
- ☞ Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est décroissante.
- ☞ Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors la suite u est croissante.
- ☞ Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est croissante.
- ☞ Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors la suite u est décroissante.



u est croissante



u est décroissante



u est constante

Exemples 10 :

- ☞ La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2n+5$ est arithmétique de raison -2.
  Elle est donc décroissante.
- ☞ La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $0 < \frac{1}{3} < 1$ et de premier terme $v_n = -2 < 0$.
  Elle est donc croissante.

Remarque :

Pour étudier le sens de variation d'une suite on peut :

- ☞ Observer son comportement sur une calculatrice ou sur un tableur
- ☞ Utiliser ce que l'on connaît des suites arithmétiques et des suites géométriques.
- ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- ☞ Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 lorsque tous les termes de la suite sont strictement positifs