

Calculer des proportions

I Généralités

Définitions : *Proportion d'une sous-population*

Soit A une partie d'un ensemble E (on dit que A est une **sous-population** de E).

On note n_E le nombre d'éléments (on dit aussi d'individus) de E , et n_A le nombre d'éléments de A .

On appelle **proportion de A dans E** , ou encore **proportion de A par rapport à E** , le quotient :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

Remarques :

- ☞ Une **proportion** est un rapport : c'est un nombre toujours compris entre 0 et 1.
- ☞ Elle peut s'exprimer sous forme d'une **fraction**, d'un **nombre décimal** ou d'un **pourcentage** :

$$0,235 = \frac{23,5}{100} = 23,5\%$$

- ☞ Le nombre p est aussi appelé **fréquence** de A dans E , ou encore taux de A par rapport à E .
- ☞ Le nombre n_A est l'**effectif** de A , le nombre n_E est l'**effectif total**.

Exemple 1 : *Calculer une proportion*

En 2015, il y avait 1,44 milliards d'utilisateurs actifs dans le monde de Facebook dont 26 millions en France. La proportion des utilisateurs français de Facebook était :

$$p = \frac{26000000}{1440000000} = 0,018$$



Donner le pourcentage d'utilisateurs français de Facebook.

Exemple 2 : *Calculer un effectif à partir d'une proportion*

Dans un quotidien, on peut lire :

« 3390 personnes ont voté, c'est-à-dire 75% des inscrits sur les listes électorales ».

Calculer le nombre d'inscrits.

Correction :

Notons n_E le nombre d'inscrits.

On a donc $0,75 \times n_E = 3390$. Ainsi, $n_E = \frac{3390}{0,75} = 4520$.

4520 personnes sont donc inscrites sur les listes électorales et $\frac{3}{4}$ des inscrits ont voté.

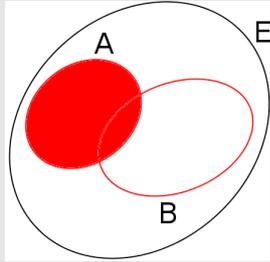
II Réunion et intersection de sous-populations

Définitions : *Union et intersection*

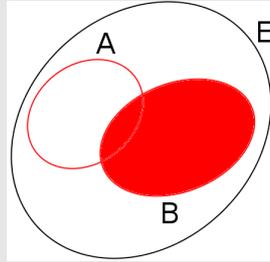
Soit A et B deux sous-populations d'une population E .

L'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$ est constituée de tous les éléments communs à A et à B .

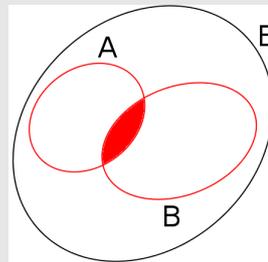
La **réunion** de A et B , notée $A \cup B$ est constituée de tous les éléments appartenant à au moins une des parties A et B .



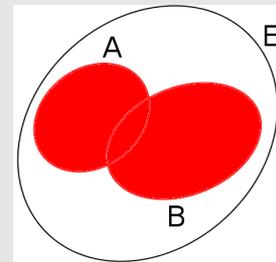
Sous-population A



Sous-population B



Intersection : $A \cap B$

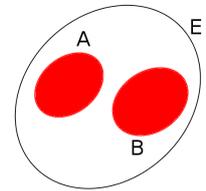


Réunion $A \cup B$

Remarque :

Lorsque A et B n'ont aucun élément en commun, on dit qu'ils sont **disjoints**.

On note dans ce cas : $A \cap B = \emptyset$ où \emptyset désigne l'ensemble vide.



A et B **disjointes**

Propriété :

Soient p_A , p_B et $p_{A \cap B}$ les proportions respectives de A , B et $A \cap B$ dans E .

La proportion de $p_{A \cup B}$ de $A \cup B$ est égale à :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

Exemple 3 :

Dans un club de sport, 22,5% des adhérents font de l'escalade, 17% font de la natation et 5,8% pratiquent les deux sports.

Quelle est la proportion des adhérents qui pratiquent l'escalade ou la natation ?

Correction :

On pose E l'ensemble des adhérents à ce club de sport, A la sous-population des adhérents qui pratiquent l'escalade et B celle des adhérents qui pratiquent la natation.

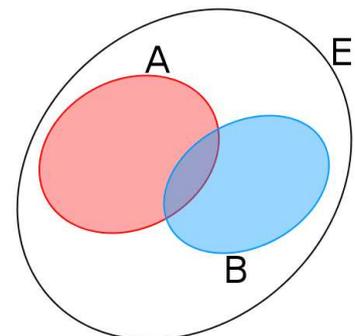
On a alors $p_A = \frac{22,5}{100}$ et $p_B = \frac{17}{100}$.

$A \cap B$ représente les adhérents pratiquant les deux sports : $p_{A \cap B} = \frac{5,8}{100}$

$A \cup B$ représente les adhérents pratiquant au moins un des deux sports.

Comme $p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$ $p_{A \cup B} = \frac{22,5}{100} + \frac{17}{100} - \frac{5,8}{100} = 0,337$

On peut conclure que 33,7% pratiquent au moins un des deux sports.





Dans ce club de sport, calculer la proportion des adhérents qui ne pratiquent que l'escalade.

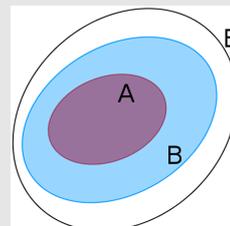
Remarque :

Si les deux sous-populations A et B sont **disjointes**, alors : $p_{A \cup B} = p_A + p_B$.

III Inclusion de sous-populations

Définition : *Inclusion*

Lorsque tous les éléments d'un ensemble A appartiennent à un ensemble B , on dit que A est **inclus** dans B , et on note $A \subset B$.



Propriété :

Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.

En notant p_1 la proportion de A dans B et p_2 la proportion de B dans E , la proportion de A dans E vaut alors $p_1 \times p_2$.

Exemple 4 : *Calculer un proportion avec une inclusion*

Dans une classe de première, il y a 30% de garçons, dont 60% ont 17 ans.

Calculer la proportion des garçons de 17 ans dans cette classe.

Correction :

En notant E l'ensemble de la classe, A l'ensemble des garçons de 17 ans et B l'ensemble des garçons de cette classe, on a $A \subset B \subset E$.

Par ailleurs, on sait que $p_1 = 0,3$ et $p_2 = 0,6$.

Donc la proportion de A dans E vaut $p_1 \times p_2 = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

Il y a 18% de garçons de 17 ans dans cette classe.

On peut aussi retenir : « 30% de 60% = $0,30 \times 0,6 = 0,18$ ».



Quelle est la proportion de garçons n'ayant pas 17 ans dans cette classe ?



Dans cette classe, 60% des filles ont aussi de 17 ans.

Quelle est la proportion de filles de 17 ans dans cette classe ?