Trigonométrie, corrections

Correction Exercice 1 :

1) $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OA}\right) = 30°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OB}\right) = 45°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OC}\right) = 60°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OD}\right) = 90°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OE}\right) = 120°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OF}\right) = 135°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OG}\right) = 150°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OH}\right) = 180°$
$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OR}\right) = -30°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OQ}\right) = -45°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP}\right) = -60°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right) = -90°$
$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right) = -120°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OL}\right) = 135°$ $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OK}\right) = -150°$

2) Sur le cercle ci-contre, donner une mesure des angles suivants :
   - $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right) = 90°$
   - $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON}\right) = -120°$
   - $\left(\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OC}\right) = -30°$
   - $\left(\overrightarrow{OK}\,;\overrightarrow{OA}\right) = 180°$
   - $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OH}\right) = 150°$
   - $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OP}\right) = -90°$
   - $\left(\overrightarrow{OH}\,;\overrightarrow{OD}\right) = -90°$
   - $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OP}\right) = 60°$

Correction Exercice 2 :

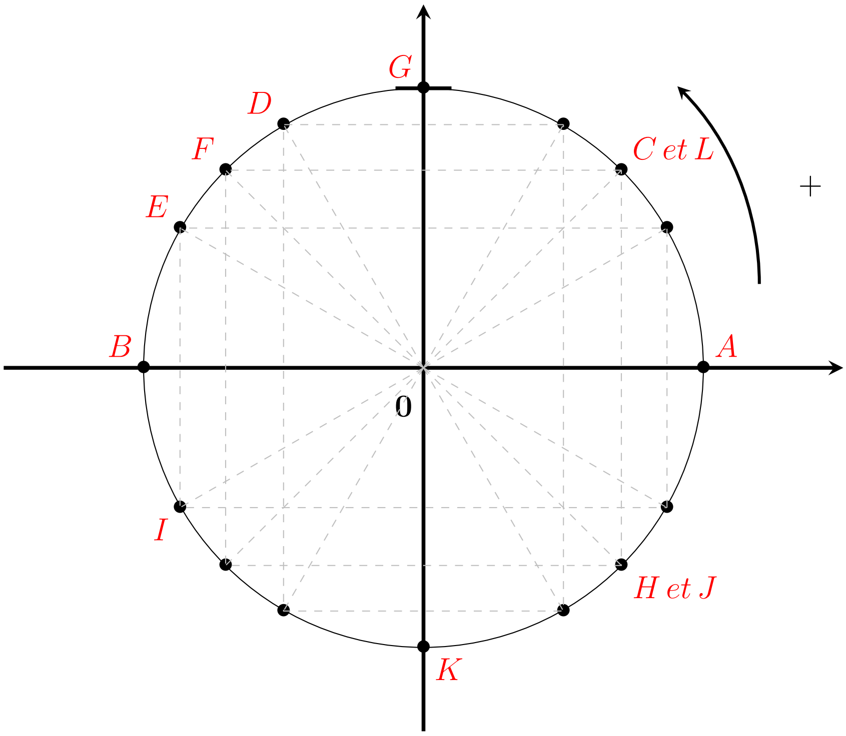
1) Convertir en radians les mesures suivantes données en degré :
$10° = \frac{\pi}{18}$ rad $\quad 53° = \frac{53\pi}{180}$ rad $\quad 180° = \pi$ rad $\quad 60° = \frac{\pi}{3}$ rad $\quad 18° = \frac{\pi}{10}$ rad

2) Convertir en degrés les mesures suivantes données en radians ;
$\frac{\pi}{3} = 60°$ $\quad \frac{2\pi}{3} = 120°$ $\quad \frac{\pi}{4} = 45°$ $\quad \frac{5\pi}{2} = 450°$ $\quad \frac{3\pi}{8} = 67{,}5°$

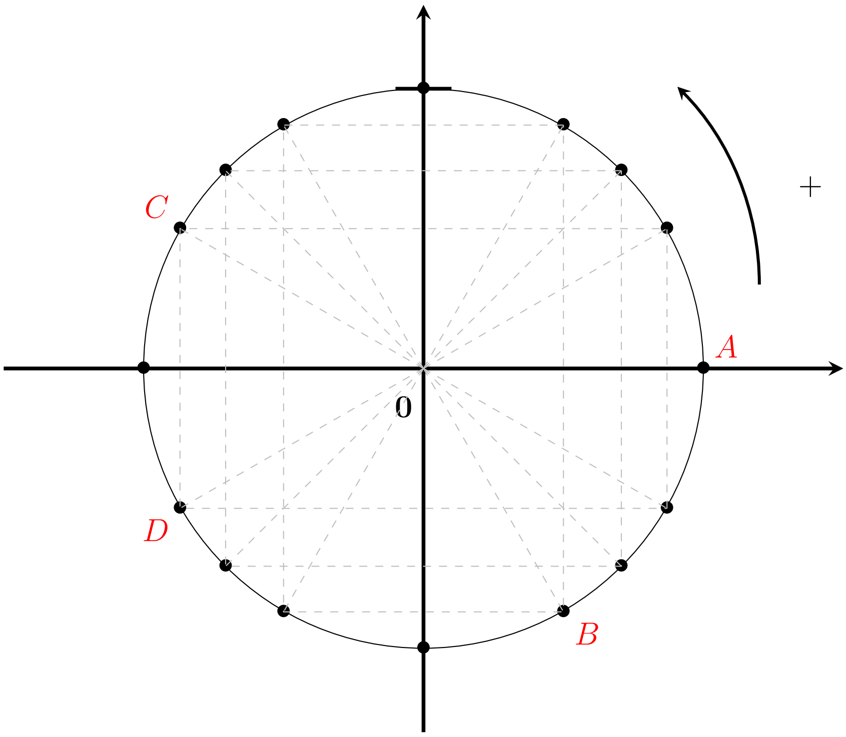
Correction Exercice 3 :

On doit connaître la longueur de l'arc pour un cercle de 1 cm (cercle trigo).
On a donc un arc qui mesure $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ cm, donc l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ mesure $\frac{1}{2}$ radian.
En utilisant la relation d'équivalence entre degrés et radian on en déduit que cela représente :
$\frac{1}{2} \times 180 \div \pi \approx 28{,}65°$.

Correction Exercice 4 :



Correction Exercice 5 :

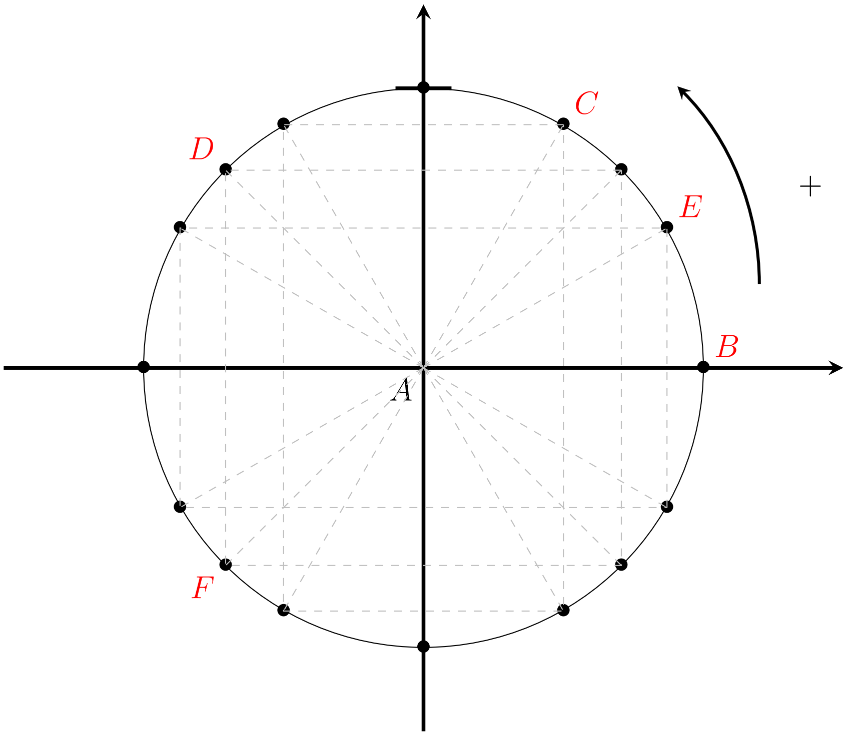


1) voir le cercle

2) On a : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}=-\frac{2\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

3) On a : $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$

Correction Exercice 6 :



1) voir cercle

2) Par lecture directe, ou calcul, on a :
$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$, qui est une mesure principale car $\in]-\pi\,;\,\pi]$.
$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AF}\right)=(\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AF})=-\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{6\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{2}=-\dfrac{4\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=-2\pi+\dfrac{\pi}{2}$ soit $\dfrac{\pi}{2}$ en mesure principale.
$\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}\right)=(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{9\pi}{12}+\dfrac{4\pi}{12}=\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{24\pi}{12}-\dfrac{11\pi}{12}=2\pi-\dfrac{11\pi}{12}$ soit $-\dfrac{11\pi}{12}$ en mesure principale.
$\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE}\right)=(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AE})=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{9\pi}{12}+\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{11\pi}{12}$, qui est une mesure principale car $\in]-\pi\,;\,\pi]$.

Correction Exercice 7 :

a) $\alpha=\dfrac{7\pi}{2}=\dfrac{8\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=4\pi-\dfrac{\pi}{2}$ $\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$

b) $\alpha=-\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{6\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=-2\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

c) $\alpha=\dfrac{37\pi}{6}=\dfrac{36\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=6\pi+\dfrac{\pi}{6}$ $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

d) $\alpha=\dfrac{25\pi}{4}=\dfrac{24\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=6\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

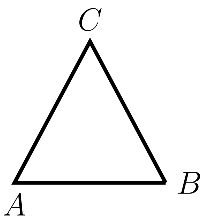
e) $\alpha=\dfrac{205\pi}{3}=\dfrac{204\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=68\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

f) $\alpha=-\dfrac{117\pi}{7}=-\dfrac{112\pi}{7}-\dfrac{5\pi}{7}=-16\pi-\dfrac{5\pi}{7}$ $\boxed{\dfrac{-5\pi}{7}}$

Correction Exercice 8 :

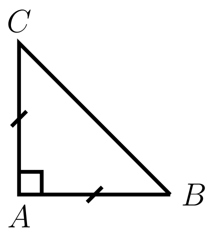
Attention au sens de lecture

Un triangle équilatéral a trois angles de $\frac{\pi}{3} = (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB})$,



Un triangle rectangle isocèle a un angle de $\frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$

et deux angles de $\frac{\pi}{4} = (\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB})$



Correction Exercice 9 :

1) *a)* $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ donc, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

b) $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ donc, $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $-\frac{13\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6}$ donc, $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

2) *a)* $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$, donc, $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{81\pi}{4} = \frac{80\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 20\pi + \frac{\pi}{4}$, donc, $\cos\left(\frac{81\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{81\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\frac{107\pi}{4} = -\frac{104\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -26\pi - \frac{3\pi}{4}$, donc, $\cos\left(-\frac{107\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{107\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) *a)* $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, donc, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

b) $\frac{71\pi}{3} = \frac{72\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 24\pi - \frac{\pi}{3}$, donc, $\cos\left(\frac{71\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{71\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{97\pi}{3} = -\frac{96\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -32\pi - \frac{\pi}{3}$, donc, $\cos\left(-\frac{97\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{97\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Correction Exercice 10 :

1) On a : $\frac{9\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$; $\frac{21\pi}{5} = \frac{20\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = 4\pi + \frac{\pi}{5}$
$-\frac{11\pi}{5} = -\frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = -2\pi - \frac{\pi}{5}$; $\frac{14\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = 2\pi + \frac{4\pi}{5} = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{5}$
D'après les formules du cours, on a :
$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{21\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{11\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{14\pi}{5}\right)$. Donc $\frac{14\pi}{5}$ est l'intrus.

2) On a $-\dfrac{8\pi}{7}=-\pi-\dfrac{\pi}{7}$; $\dfrac{20\pi}{7}=\dfrac{21\pi}{7}-\dfrac{\pi}{7}=3\pi-\dfrac{\pi}{7}$; $\dfrac{13\pi}{7}=\dfrac{14\pi}{7}-\dfrac{\pi}{7}=2\pi-\dfrac{\pi}{7}$;
$-\dfrac{13\pi}{7}=-\dfrac{14\pi}{7}+\dfrac{\pi}{7}=-2\pi+\dfrac{\pi}{7}$
D'après les formules du cours, on a :
$\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)=-\cos\left(\dfrac{20\pi}{7}\right)=\cos\left(\dfrac{13\pi}{7}\right)=\cos\left(-\dfrac{13\pi}{7}\right)=-\cos\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)$. Donc deux intrus : $\dfrac{20\pi}{7}$ et $-\dfrac{8\pi}{7}$

Correction Exercice 11 :

1) On a d'après le cours : $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$, ainsi, $(\sin\alpha)^2=1-(\cos\alpha)^2=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$
Donc, $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$ ou $\sin\alpha=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$
OR : $\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$, donc, le sinus est forcément négatif, donc, $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$

2) On utilise les formules du cours, donc : $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ b) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$
c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ d) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.

Correction Exercice 12 :

1) On a d'après le cours : $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$, ainsi, $(\cos\alpha)^2=1-(\sin\alpha)^2=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$
Donc, $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{8}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
OR : $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, donc, le cosinus est forcément négatif, donc, $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2) On utilise les formules du cours, donc : $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$
b) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $\cos(-\alpha)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Correction Exercice 13 :

1) On pose $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$.
On a d'après le cours : $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$, ainsi,
$(\cos\alpha)^2=1-(\sin\alpha)^2=1-\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=1-\dfrac{8-2\sqrt{12}}{16}=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$
OR : $\alpha\in\left[0\,;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, le cosinus est forcément positif, donc, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

2) *a)* On a $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{6\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}$, on en déduit que $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et
$\sin\dfrac{5\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

b) On a $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{6\pi}{12}+\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}$, on en déduit que $\cos\dfrac{7\pi}{12}=-\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et
$\sin\dfrac{7\pi}{12}=\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

c) On a $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{12\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12} = \pi - \dfrac{\pi}{12}$, on en déduit que $\cos \dfrac{11\pi}{12} = -\cos \dfrac{\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin \dfrac{11\pi}{12} = \sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Correction Exercice 14 :

1) $\cos \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{3\pi}{4} + \cos \dfrac{5\pi}{4} + \cos \dfrac{7\pi}{4} = \cos \dfrac{\pi}{4} - \cos \dfrac{\pi}{4} - \cos \dfrac{\pi}{4} + \cos \dfrac{\pi}{4} = 0.$
2) $\sin \dfrac{\pi}{5} - \sin \dfrac{4\pi}{5} + \sin \dfrac{6\pi}{5} - \sin \dfrac{9\pi}{5} = \sin \dfrac{\pi}{5} - \sin \dfrac{\pi}{5} - \sin \dfrac{\pi}{5} + \sin \dfrac{\pi}{5} = 0.$

Correction Exercice 15 :

Á l'aide d'un cercle trigonométrique, trouver les réels x de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ tels que :

1) $\sin x = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ donc logiquement, $x = -\dfrac{5\pi}{6}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{\pi}{6}$.
2) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{4}$ donc logiquement, $x = \dfrac{\pi}{4}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{\pi}{4}$.
3) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = \dfrac{3\pi}{4}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.
4) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = -\dfrac{\pi}{6}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{5\pi}{6}$.
5) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = \dfrac{\pi}{6}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{\pi}{6}$.
6) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = -\dfrac{\pi}{3}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Correction Exercice 16 :

On se ramène à une équation comme vue dans l'exercice 15.

1) $2\sin x - 1 = 0$ revient à $\sin x = \dfrac{1}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = \dfrac{\pi}{6}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = \dfrac{5\pi}{6}$.
   On veut des solutions sur $\mathbb{R}$, donc, on doit prendre en compte les tours complets qui peuvent être ajoutés, ce qui se traduit avec un $+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a donc les solutions de cette équation de la forme : $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ revient à $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = \dfrac{\pi}{4}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $-\dfrac{\pi}{4}$.
Donc les solutions de cette équation de la forme : $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

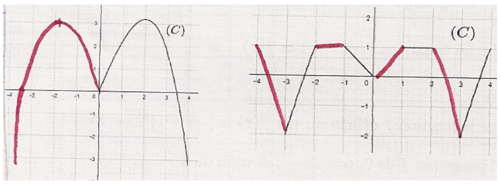
3) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ revient à $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = \dfrac{5\pi}{6}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{5\pi}{6}$.
Donc les solutions de cette équation de la forme : $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

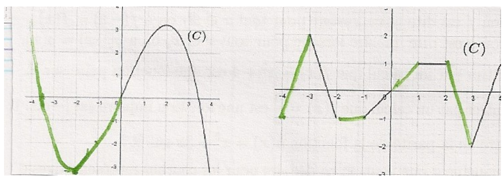
4) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ revient à $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ on sait d'après les valeurs remarquables que $x = -\dfrac{\pi}{4}$, mais en regardant sur le cercle, on sait qu'il y a une autre valeur : $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.
Donc les solutions de cette équation de la forme : $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction Exercice 17 :

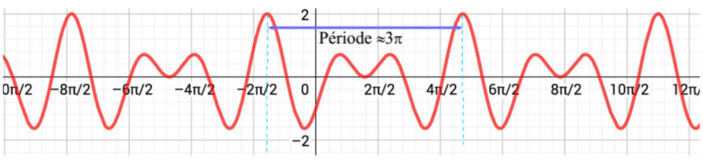
Si une fonction est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (puisque $f(x) = f(-x)$), ainsi, on peut en déduire que les fonctions f et h sont bien des fonctions paires.
Si une fonction est impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère O (puisque $f(x) = -f(-x)$), ainsi, on peut en déduire que la fonctions k est bien une fonction impaire.
La fonction g n'est rien de tout cela, ni paire, ni impaire...

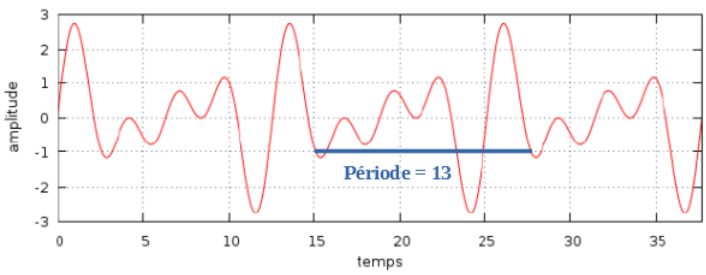
Correction Exercice 18 :

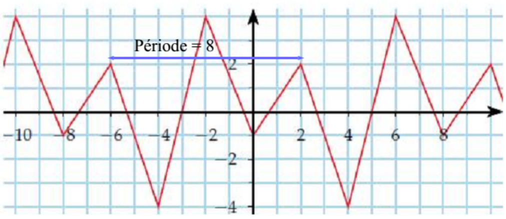


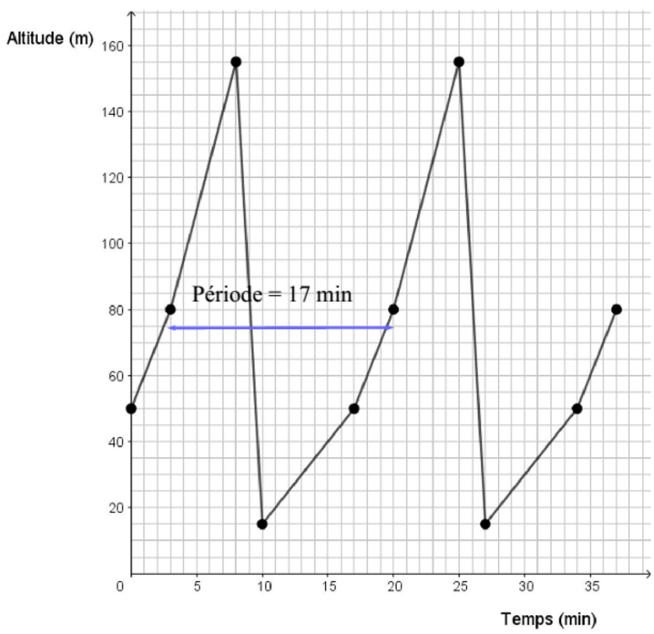


Correction Exercice 19 :

a) 

b) 

d) 

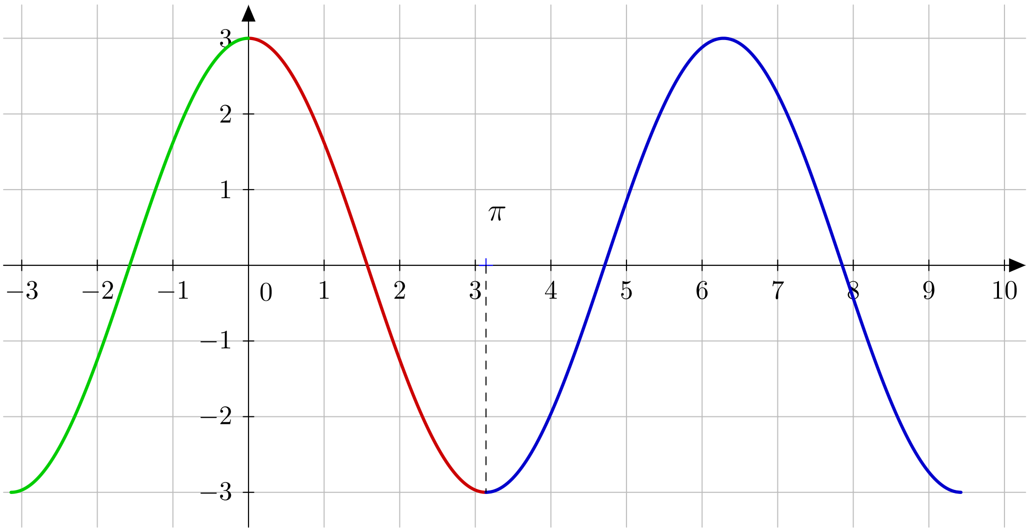


c)

Correction Exercice 20 :

1) On a : $f(-x) = 3\cos(-x) = 3 \times (-\cos(x)) = -3\cos(x)$, donc, la fonction f est impaire et sa courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

2) Calculer $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) = 3\cos(x)$, puisque la fonction cosinus est 2π périodique donc, on peut translater la portion de courbe sur $[-\pi\,;\,\pi]$ pour la reproduire sur $[\pi\,;\,3\pi]$.



Exercice 21 :

On considère la fonction cosinus, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

1) On a : $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'après les valeurs remarquables du cours. C'est à dire, $y_M = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) D'après la lecture du cercle trigo ou les résolutions d'équations déjà vues, ou même l'exploitation de la courbe, il y a bien un autre point qui a la même abscisse, c'est le point N, d'abscisse $-\dfrac{3\pi}{4}$ (on sait que $\cos(x) = \cos(-x)$ ou que la fonction cosinus est paire)

Correction Exercice 22 :

On considère la fonction sinus, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

1) On a : $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'après les valeurs remarquables du cours. C'est à dire, $y_M = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) On sait que la fonction sinus est impaire, donc, on sait que sa courbe est symétrique par rapport à l'origine donc, le point $N\,(-x_M\,;\,-y_M)$ appartient également à la courbe $\mathscr{C}$.

Correction Exercice 23 :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

   a) On a : $f(-x) = \cos(-x) + \sin(-x) = \cos(x) - \sin(x) \neq f(x)$, mais $-f(x) = -\cos(x) - \sin(x) \neq$

$f(-x)$, donc, f n'est ni paire, ni impaire.

b) On sait que les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques, on a : $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \sin(x+2\pi) = \cos(x)+\sin(x) = f(x)$ donc f est bien 2π périodique, ce qui signifie que sa courbe se répète tous les 2π.

c) Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc, en additionnant membre à membre, $-1+(-1) \leqslant \cos(x)+\sin(x) \leqslant 1+1$, donc : $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(3x)+1$.

a) On a : $g(-x) = \cos(3\times(-x))+1 = \cos(3x)+1 = g(x)$ donc, g est paire.

b) On sait que la fonction cosinus est 2π périodique.
On a : $g\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\times\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)+1 = \cos\left(3x+3\times\dfrac{2\pi}{3}\right)+1 = \cos(3x+2\pi)+1 = \cos(3x)+1 = g(x)$,donc g est $\dfrac{2\pi}{3}$ périodique. Interpréter graphiquement.

c) Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant$ donc, $-1 \leqslant \cos(3x) \leqslant 1$, donc, en ajoutant 1 à tous les membres, $-1+1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1+1$, donc : $0 \leqslant g(x) \leqslant 2$.

Correction Exercice 24 :

1) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)-\sin(x)$.
Représenter la fonction définie par $g(x) = (f(x))^2 + (f(-x))^2$ à l'aide de la calculatrice.

2) On peut supposer que cette fonction est constante, égale à 2.

3) On a : $g(x) = (\cos(x)-\sin(x))^2 + (\cos(-x)-\sin(-x))^2$.

$$\begin{aligned}
&= (\cos(x))^2 - 2\cos(x)\sin(x) + (\sin(x))^2 + (\cos(x)+\sin(x))^2\\
&= (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 - 2\cos(x)\sin(x) + (\cos(x))^2 + 2\cos(x)\sin(x) + (\sin(x))^2\\
&= (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1+1 = 2
\end{aligned}$$

Correction Exercice 25 :

On a $f(0)=1$, $g(0)=0$, $h(0)=1$ et $k(0)=0$ Donc, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ sont $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_k$ sont $\mathscr{C}_3$ ou $\mathscr{C}_4$.
On a $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, donc $\mathscr{C}_f$ est $\mathscr{C}_2$.
On a $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$, donc $\mathscr{C}_h$ est $\mathscr{C}_1$.
On a $g(\pi) = -2$, donc $\mathscr{C}_g$ est $\mathscr{C}_3$ (on n'utilise pas l'image de $\dfrac{\pi}{2}$ puisque c'est la même sur les 2 dernières courbes.
On a donc $\mathscr{C}_k$ qui est $\mathscr{C}_4$

Exercice 26 : **Étude de la fonction $f(x) = \sin(2x)$**

1) *a)* On sait que la fonction sinus est impaire.
On a : $f(-x) = \sin(2\times(-x)) = \sin(-2x) = -\sin(2x)$ donc, f est impaire.

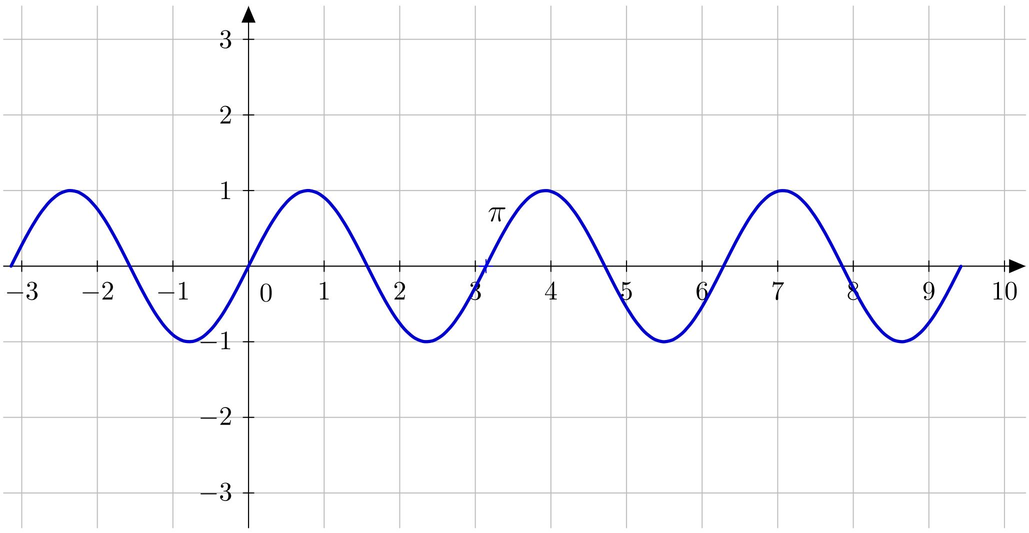
b) On a $f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x) = f(x)$ donc, f est périodique, de période π.

2) D'après la question 1), il faut étudier la fonction sur l'intervalle : $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme la fonction est impaire on pourra déduire la courbe représentative de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ connaissant la portion sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, en faisant une symétrie de centre O.
D'après la question 2), la fonction est π périodique donc, on pourra déduire la courbe représentative de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$ il suffit de reporter le morceau de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ et le morceau de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$ sur $\left[-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\right]$

3) On le tableau :

x	0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{8}$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0

4) On a :



Construire la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,3\pi]$.