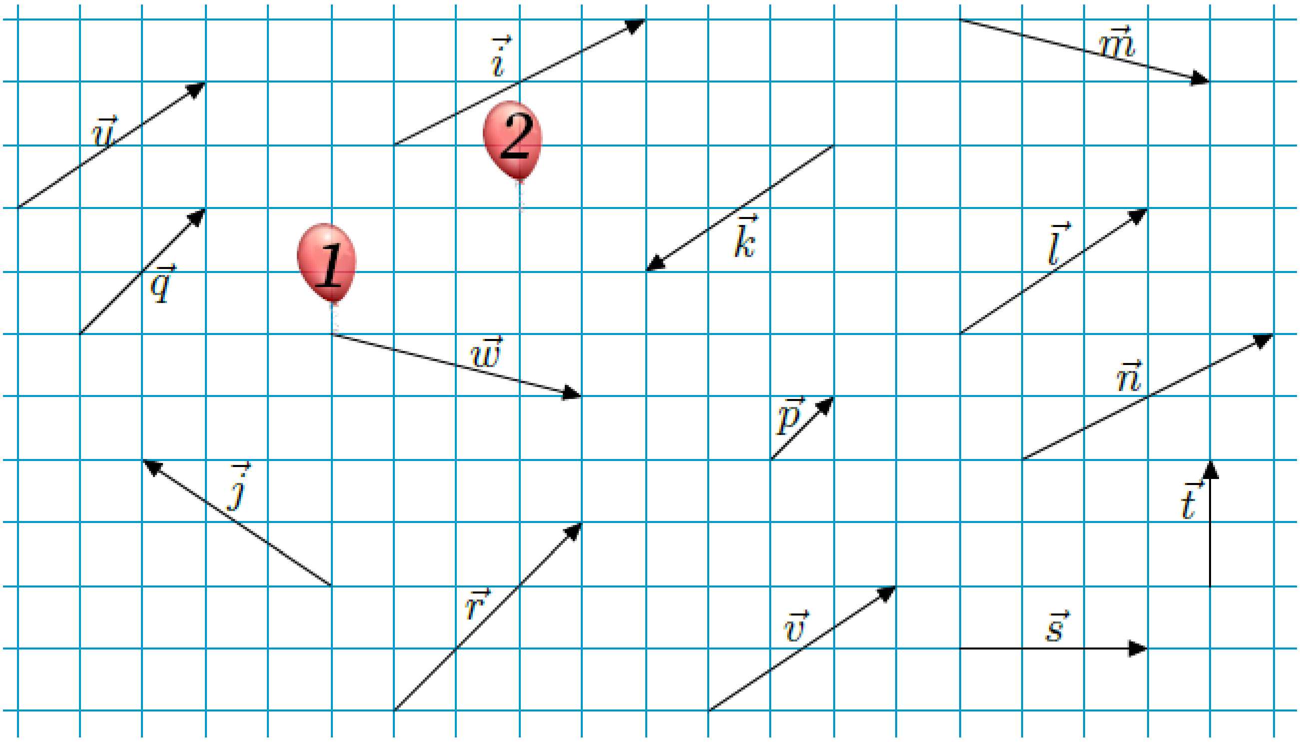
Seconde **2019 - 2020**

Exercices : Vecteurs

Étude 3 : Au gré du vent

1. Les vents du mardi et du mercredi ont la même **direction** et le même **sens** mais ils n'ont pas la même force
2. Les vents du lundi et du vendredi ont la même **direction** et la même force mais ils ont des **sens opposés**
3. Les vents du lundi et du mercredi ont la même force mais pas la même **direction**

Étude 4 : Au gré du vent **Voir la vidéo**

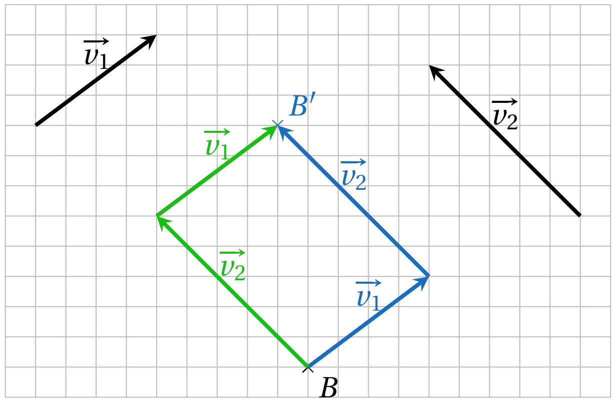


1. On peut écrire par exemple : $\vec{u} = \vec{v} = \vec{l}$ ou $\vec{i} = \vec{n}$ ou $\vec{m} = \vec{w}$
2. Vendredi dernier, le ballon rouge s'est déplacé de la position ① vers la position ②.
   - Nadia affirme que le ballon rouge s'est déplacé en suivant le vent $\vec{u}$;
   - Pierre affirme que le ballon rouge s'est déplacé en suivant le vent $\vec{s}$ puis le vent $\vec{t}$.

   Les deux ont raison. Dans les deux cas, le ballon arrive au même endroit.
3. $\vec{u} = \vec{s} + \vec{t}$ $\quad \vec{q} + \vec{p} = \vec{r}$ $\quad \vec{t} = \vec{j} + \vec{s}$ $\quad 2\vec{t} = \vec{j} + \vec{u}$

=================Correction 1==================

On considère une carte maritime.
On note B la position initiale d'un bateau.
Durant une journée souffle le vent $\vec{v}_1$ puis le lendemain le vent $\vec{v}_2$.

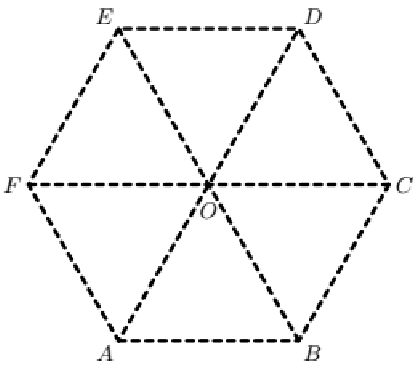


1. Quelle est la position du bateau après les deux jours de vent ? Le bateau arrive en B'
2. Que se passe-t-il si on inverse l'ordre des vents ?

   Le bateau arrive en B' aussi

   On peut écrire : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$

=================Correction 2==================



1. Donner tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FE}$ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BC}$
2. Donner les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{DC}$

   Un vecteur opposé à $\overrightarrow{DC}$ est, par exemple $\overrightarrow{CD}$

   On peut écrire $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$

   On a alors : $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AF}$
3. Donner deux vecteurs dont l'un est le double de l'autre.

   $\overrightarrow{AD}$ est le double de $\overrightarrow{AO}$ On peut écrire : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$
4. Donner deux vecteurs dont l'un est la moitié de l'autre.

   À l'inverse, $\overrightarrow{AO}$ est la moitié de $\overrightarrow{AD}$ On peut écrire : $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
5. Donner un vecteur qui peut s'écrire comme la somme de deux autres.

   Par exemple avec le vecteur $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$. Mais on a aussi : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO}$ ou encore : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BC}\ldots$

   Enfin, plus alambiqué : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\ldots$

=================Correction 3==================

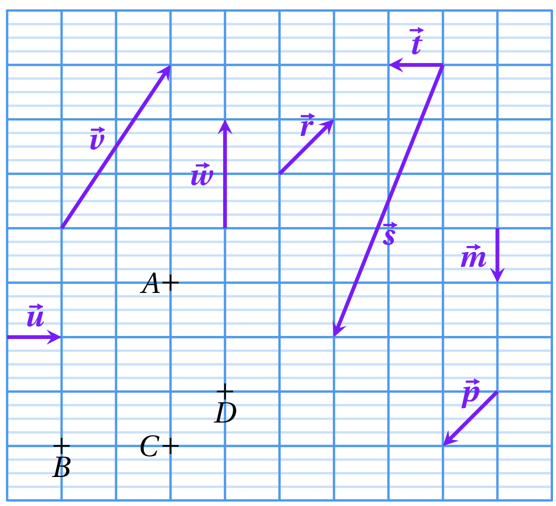
1. A partir de la figure ci-contre, citer un vecteur :

   a) opposé à $\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{DC}$ ou $\vec{p}$

   b) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$: $\vec{w}$

   c) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire : $\vec{t}$

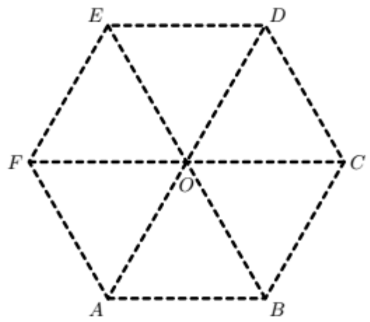
   d) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{BA} = \vec{v}$



2. $3\vec{m} = \overrightarrow{AC}$ ou encore $\vec{m} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
3. $2\vec{u} = \overrightarrow{BC}$
4. $3\vec{u} = \overrightarrow{BD} + \vec{m}$
5. $2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{w} = \vec{v}$ ou encore $2\vec{v} = 4\vec{u} + 3\vec{w}$

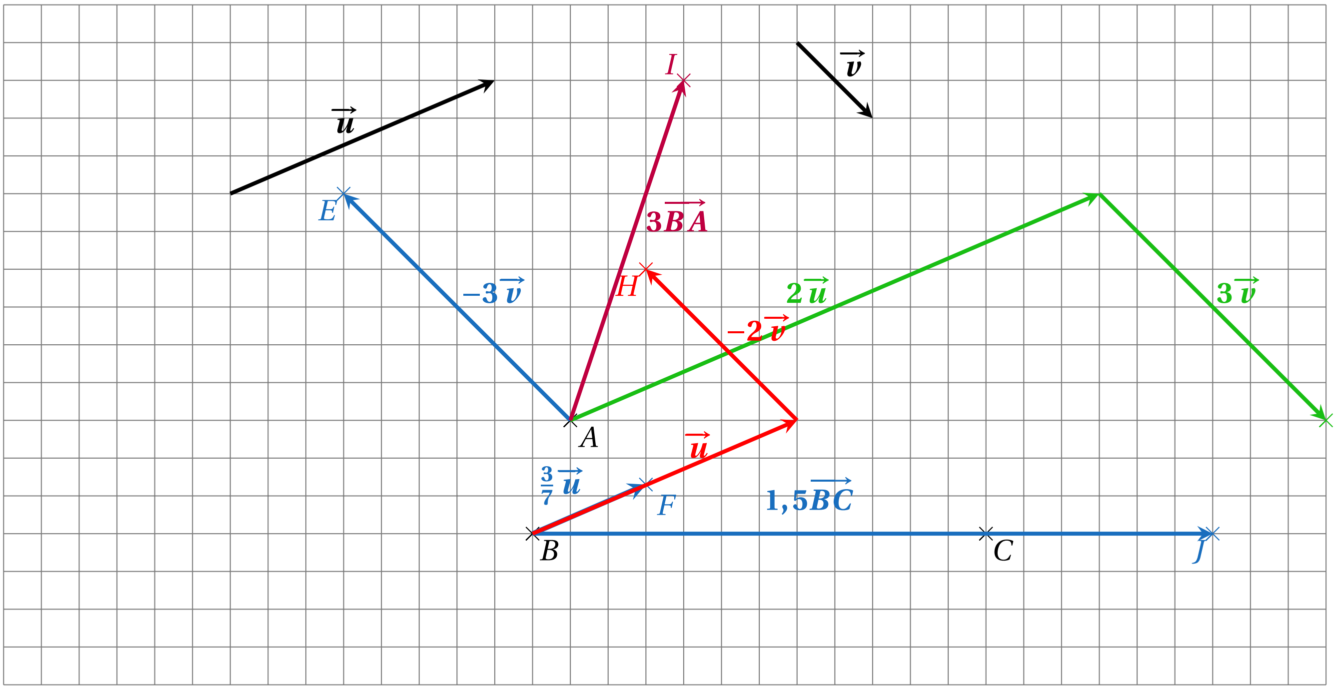
=================Correction 4==================

$ABCDEF$ est un hexagone régulier. Compléter les égalités suivantes à l'aide des points de la figure.



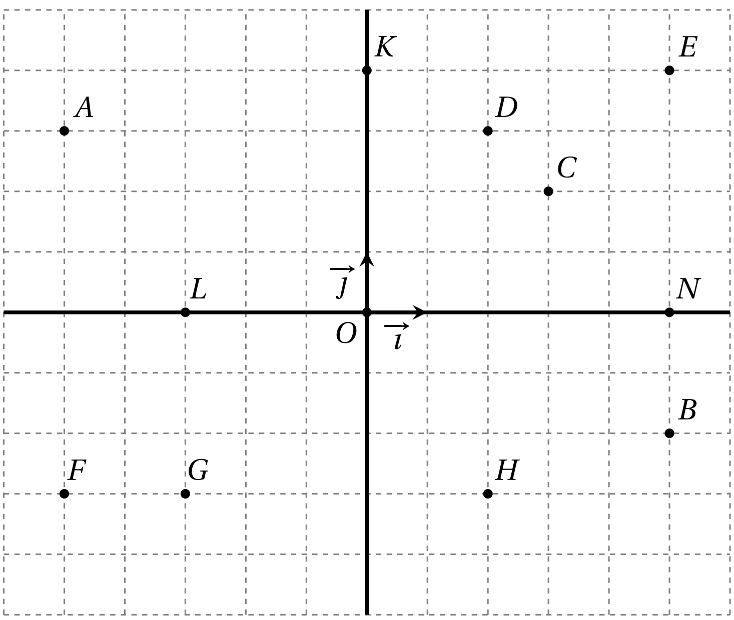
1. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$
3. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EA}$
4. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$
5. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{CO}$
6. $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CO}$
7. $2\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$
8. $2\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{FB}$

=================Correction 5==================



1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=-3\vec{v}$.
2. Placer le point J tel que $\overrightarrow{BJ}=1,5\overrightarrow{BC}$.
3. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{7}\vec{u}$.
4. Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG}=2\vec{u}+3\vec{v}$.
5. Placer le point H tel que $\overrightarrow{BH}=\vec{u}-2\vec{v}$.
6. Placer le point I tel que $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{BA}$.

=================Correction 6==================



Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-contre,

on a les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Lire les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{LG}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

==================Correction 7===================

On se place dans un repère orthonormé.
On considère les points $M(-3;6)$, $N(5;-1)$, $P(11;0)$, $Q(3;7)$ et $R(-10;5)$.
Montrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$. Que peut-on en déduire ?

On commence par calculer les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{MN}:\begin{pmatrix} x_N-x_M \\ y_N-y_M \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-(-3) \\ -1-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{QP}:\begin{pmatrix} x_P-x_Q \\ y_P-y_Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11-3 \\ 0-7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

On a bien $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ et ainsi le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

On pourrait vérifier si ce quadrilatère est un rectangle en calculant les longueurs des diagonales…

==================Correction 8===================

On se place dans un repère orthonormé. On donne les points $A(-1;3)$, $B(-2;-4)$ et $E(5;0)$.
Déterminer les coordonnées du point F tel que $ABEF$ soit un parallélogramme.

Pour que $ABEF$ soit un parallélogramme il faudrait que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$ (par exemple).

On commence par calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-(-1) \\ -4-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Pour les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FE}$ on a deux inconnues : x_F et y_F :

$$\overrightarrow{FE}:\begin{pmatrix} x_E-x_F \\ y_E-y_F \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-x_F \\ 0-y_F \end{pmatrix}$$

Pour que $ABEF$ soit un parallélogramme il faudrait que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FE}$. On obtient donc deux petites équations :

$5-x_F=-1$ et $0-y_F=-7$ Ainsi : $x_F=6$ et $y_F=7$

Pour que $ABEF$ soit un parallélogramme il faut que le point F ait pour coordonnées $F(6\,;\,7)$.

==================Correction 9===================

Soient, dans un repère orthonormé, les points $A(1;-2)$; $B\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ et $C(2;1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-1 \\ \dfrac{3}{2}-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{si vous n'aimez pas les fractions.}$$

$$\overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}:\begin{pmatrix} -1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD}:\begin{pmatrix} x_D-x_A \\ y_D-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_D-1 \\ y_D-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_D-1 \\ y_D+2 \end{pmatrix}.$$

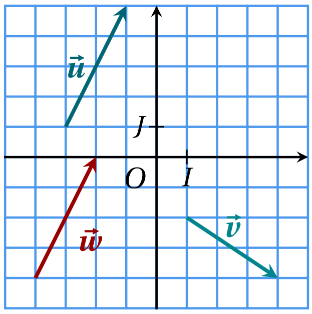
On obtient donc deux petites équations :

$x_D-1=0$ et $y_D+2=6{,}5$ Ainsi : $x_D=1$ et $y_D=4{,}5$

Le point D a pour coordonnées $D(1\,;\,4{,}5)$.

==================Correction 10===================

Le plan est muni d'un repère $(O; I, J)$.



1. Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

   $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{w}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

2. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

   a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2+3\\4+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ c) $\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}2+2\\4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

   b) $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}2-3\\4-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ $\quad$ d) $\vec{u}-\vec{w}\begin{pmatrix}2-2\\4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

==================Correction 11===================

On se place dans un repère orthonormé. Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-24\end{pmatrix}$ $\qquad$ 2. $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\-12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1.5\end{pmatrix}$ $\qquad$ 3. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{33}\\\frac{7}{22}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{10}{7}\\-\frac{15}{4}\end{pmatrix}$

On cherche si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles
Plusieurs façons de voir les choses :

- On regarde si les produits en croix sont égaux;
- On cherche un éventuel coefficient de proportionnalité.

1. Pour passer de 5 à 10 on multiplie par 2 et aussi pour passer de -12 à -24. Les deux vecteurs proposés sont donc colinéaires.
2. **Produits en croix :** $15\times(-1,5)=-22,5$ $\quad$ et $\quad$ $-12\times 2=-24$.

   Les produits en croix ne sont pas égaux donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
3. **Produits en croix :** $-\frac{2}{33}\times(-\frac{15}{4})=-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}\times 11}\times(-\frac{5\times\cancel{3}}{\cancel{2}\times 2})=\frac{5}{11\times 2}=\frac{5}{22}$ $\quad$ et $\quad$ $\frac{\cancel{7}}{22}\times\frac{10}{\cancel{7}}=\frac{10}{22}$.

   Les produits en croix ne sont pas égaux donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

==================Correction 12===================

On se place dans un repère orthonormé. Soient les points $A(-2\,;0)$, $B(4\,;3)$, $C(3\,;-2)$ et $D(1\,;-3)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Le plus simple est de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ puis de regarder s'ils sont colinéaires :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-3\\-3-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Si l'on multiplie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ par -3 on obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ce qui prouve que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

==================Correction 13===================

On se place dans un repère orthonormé. Soient les points $E(-1\,;-2)$, $F(3\,;1)$, $G(-3\,;-3.5)$ et $H(5\,;2)$.

1. Démontrer que les points E, F et G sont alignés.
2. Les points E, F et H sont-ils alignés ?

1. Pour démontrer que les points E, F et G sont alignés on peut montrer que les droites (EF) et (FG) sont parallèles en, puisqu'elles ont un point commun (le point F), elles seront donc confondues.

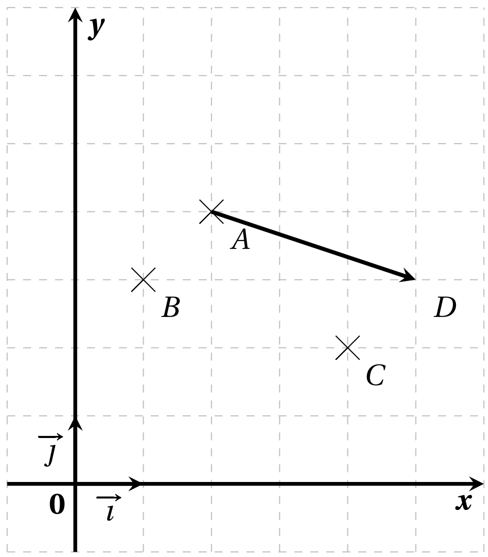
   Le plus simple est de calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ puis de regarder s'ils sont colinéaires :
   - $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3-(-1)\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
   - $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-3-3\\-3,5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4,5\end{pmatrix}$

   Si l'on multiplie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ par $-1,5$ on obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires ce qui prouve que les droites (EF) et (FG) sont parallèles puis les points E, F et G sont alignés.
2. Même méthode que précédemment :
   - $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3-(-1)\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$
   - $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}5-3\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

   Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires ce qui prouve que les droites (EF) et (FH) ne sont pas parallèles ainsi les points E, F et H ne sont pas alignés.

==================Correction 14===================

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(0;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(2;4)$, $B(1;3)$ et $C(4;2)$.



1. Placer les points A B et C et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Le point D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   a) Construire le point D.
   b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$.

      On a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.
4. Calculer alors AB, AC et BC.

   En utilisant la formule du cours, on a : $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et $BC=\sqrt{10}$.
5. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   On a $AB^2=2$, $AC^2=8$ et $BC^2=10$ d'après le 4). On a alors : $AB^2+AC^2=BC^2$, donc d'après la réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.